Modelim matematik për mësuesit

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Kapitulli 1 · Versioni 2.1

Natyra dhe cikli i modelimit matematik

I. Leksioni

2 orë mësimore · 100 minuta

Plani i leksionit (100 min)

0–15: situata e bibliotekës dhe pyetja; 15–35: cikli dhe supozimet; 35–60: matematizimi dhe modelet alternative; 60–85: interpretimi dhe vlefshmëria; 85–100: diskutimi dhe sinteza. Produkti: skema e modelimit me pyetjen, ndryshoret, supozimet dhe kriterin e vendimit.



Cikli i modelimit: verifikimi mund të kërkojë rishikim të supozimeve.

Udhëzues për studimin e kapitullit

Pyetja qendrore e këtij kapitulli është se si ndërtohet një përshkrim matematikor i një dukurie dhe mbi çfarë bazash mund të mbrohet përdorimi i tij. Leximi fillon me nocionet themelore dhe vijon me studimet e rastit. Trajtimet e thelluara në pjesën 4 shërbejnë edhe për studim të pavarur; nuk kërkohet që të gjitha të zhvillohen gjatë dy orëve të leksionit.

Pjesa	Qëllimi
Leksioni (2 orë mësimore, 100 min)	Ndërtimi i kuptimit, formalizimi dhe interpretimi.
Seminari (2 orë mësimore, 100 min)	Arsyetimi dhe zgjidhja e problemeve.

Pjesa	Qëllimi
Laboratori (1 orë mësimore, 50 min)	Përcaktimi i parametrave dhe shqyrtimi i parashikimeve.
Biblioteka e mësuesit	Përshtatja didaktike dhe vlerësimi formues.
Studimi i pavarur	Thellimi teorik dhe puna kërkimore.

> Shembujt numerikë me të dhëna të simuluara nuk përbëjnë dëshmi empirike. Vlefshmëria e një modeli shqyrtohet në raport me qëllimin, kushtet e përdorimit dhe të dhënat e pavarura.

Rasti qendror: planifikimi i bibliotekës

Rruga e studentit: Shihni ciklin, krahasoni modelet në seminar dhe plotësoni raportin e laboratorit. Nëse mbetjet tregojnë lakim, shqyrtoni nëse lloji i kërkesave ndryshon me madhësinë e grupit. Regjistroni numrin e huazimeve dhe kthimeve, ndërprerjet dhe punonjësit në grupe të përsëritura; kalibroni modelin e rishikuar dhe rezervoni grupe të tjera për vlerësim. Parashikimi nën 30 minuta nuk është garanci për planifikimin.

A mund të shërbehet një grup prej 35 nxënësish brenda 30 minutave? T mat minutat nga fillimi i shërbimit të nxënësit të parë deri në përfundimin e kërkesës së fundit të grupit, pa përfshirë përgatitjen paraprake. Për grupin bosh vendosim T(0)=0 si marrëveshje për kohën e shërbimit, jo si matje. Krahasojmë grupe me një punonjës, të njëjtën radhë dhe përzierje të ngjashme kërkesash; regjistrojmë ndërprerjet. Modelet proporcional, afin dhe kuadratik përfaqësojnë përkatësisht kohë konstante për nxënës, një zhvendosje empirike dhe ndryshim të kohës shtesë. Të dhënat janë të simuluara.

Rikthimi në cikël: mbetjet negative në mes dhe pozitive në skaje sugjerojnë të shqyrtojmë supozimin e kohës konstante për nxënës. Regjistrojmë kohën individuale, llojin e kërkesës dhe ndërprerjet në grupe të përsëritura; më pas rikalibrojmë dhe ruajmë matje të tjera për vlerësim.

Situata → supozimet → modeli → zgjidhja → interpretimi → vlerësimi ↶ supozimet dhe plani i matjeve.

Seminari · Laboratori · Thellimi teorik

Rezultatet e të nxënit

Në përfundim studenti argumenton natyrën e modelimit, dallon saktësinë formale nga vlefshmëria empirike, ndërton modele alternative, interpreton parametrat dhe harton një veprimtari modelimi për nxënësit.

Rezultati	Detyra	Produkti dhe dëshmia
Formulon pyetjen e planifikimit	Leksion	Pyetje me prag 30 min dhe grup të përcaktuar

Argumenton supozimet	Seminar	Krahason një dhe dy punonjës; shpjegon pse nuk mjafton pjesëtimi me dy
Krahason modelet	Laborator	Tabela e parametrave, mbetjeve dhe RMSE
Interpreton parashikimin	Raport	Gabimi në pikën 35 dhe kufijtë e ekstrapolimit
Harton veprimtari shkollore	Bibliotek a	Fletë pune me pyetje, zgjidhje dhe dëshmi të të nxënit

1. Themelet teorike

Modeli matematikor është një paraqitje e formalizuar e një objekti, sistemi ose dukurie, i ndërtuar për një qëllim të përcaktuar. Modeli nuk është kopje e realitetit: ai përzgjedh karakteristikat thelbësore nëpërmjet idealizimit.

Cikli i modelimit përfshin kuptimin e situatës, idealizimin, matematizimin, zgjidhjen, interpretimin, verifikimin e vlefshmërisë dhe rishikimin. Procesi nuk është domosdoshmërisht linear; rezultatet mund të kërkojnë rikthim te supozimet.

Një model determinist mund të paraqitet si $y=M(x;\theta)$, ku x janë hyrjet dhe θ parametrat. Për të dhënat e vëzhguara, mbetja është $e_i=y_i-M(x_i;\theta)$. Mbetja e llogaritur duhet dalluar nga gabimi i rastit i një modeli probabilitar.

Saktësia matematikore, vlefshmëria empirike dhe përshtatshmëria për qëllimin janë kritere të ndryshme. Një zgjidhje e saktë nuk garanton një përshkrim të saktë të realitetit.

Kriteri	Familjet
Rastësia	Deterministe / stokastike
Koha ose gjendja	Diskrete / të vazhdueshme (mund të kombinohen)
Evolucioni	Statike / dinamike
Struktura	Lineare / jolineare

Funksioni $ax+b$ është afin; në kuptimin e algjebrës lineare është linear vetëm kur $b=0$. Në statistikë termi linear mund t'i referohet linearitetit ndaj parametrave.

1.1. Formalizimi dhe fusha e vlefshmërisë

Një model determinist statik mund të përshkruhet nga një funksion $M: D \times \Theta \to Y$, ku D është bashkësia e hyrjeve të lejueshme, Θ bashkësia e parametrave dhe Y bashkësia e rezultateve. Kufizimet fizike mund të përcaktojnë një nënbashkësi të bashkësisë së përcaktimit matematikor. Për shembull, numri i nxënësve është numër natyror, edhe kur grafiku i modelit paraqitet si kurbë e vazhdueshme.

$$M: D \times \Theta \to Y, \quad y = M(x; \theta)$$

Si ndërtohet kuptimi i një formule?

Le të marrim si shembull furnizimin me ujë të një shkolle. Nëse kërkojmë sasinë e ujit të konsumuar gjatë një dite, nuk është e nevojshme të përshkruajmë lëvizjen e çdo grimce uji në tubacione. Na interesojnë madhësi të matshme, si numri i përdoruesve, koha e qëndrimit dhe konsumi mesatar. Nëse n është numri i përdoruesve dhe q konsumi mesatar për përdorues, modeli Q=nq shpreh një lidhje të thjeshtë. Megjithatë, kjo formulë nuk përfshin ujin e përdorur për pastrimin e ndërtesës. Nëse ky konsum është Q_0, modeli $Q=Q_0+nq$ është më i përshtatshëm për vlerësimin e konsumit të përgjithshëm.

Ndryshimi ndërmjet dy formulave nuk është vetëm algjebrik. Modeli i parë parashikon konsum zero kur nuk ka përdorues; i dyti lejon konsum edhe në mungesë të tyre. Përpara se të zgjedhim njërin, duhet të pyesim nëse shkolla pastrohet edhe gjatë ditëve pa mësim. Kështu, kuptimi i parametrit Q_0 buron nga dukuria reale. Njësia e q është litra për përdorues, ndërsa Q_0 dhe Q maten në litra për ditën e shqyrtuar. Numri n është i plotë dhe jonegativ. Edhe nëse formula ka kuptim për çdo numër real, kjo nuk do të thotë se çdo vlerë reale e n ka interpretim në situatën konkrete.

1.2. Verifikimi dhe vlefshmëria

Saktësia matematikore shqyrton deduksionin; verifikimi i zbatimit kontrollon algoritmin; vlefshmëria empirike kërkon krahasim me matje; përshtatshmëria për qëllimin kërkon kriter vendimi dhe tolerancë. Kalibrimi përcakton parametrat, ndërsa vlerësimi në të dhëna të veçuara shqyrton parashikimin. Rishikimi ndryshon supozimet ose familjen.

Verifikimi kontrollon nëse ekuacionet dhe algoritmet janë zbatuar saktë; vlerësimi i vlefshmërisë shqyrton nëse modeli përfaqëson dukurinë me saktësi të mjaftueshme për qëllimin e deklaruar. Kalibrimi përcakton parametrat nga të dhënat; ai nuk zëvendëson kontrollin me të dhëna të pavarura.

Katër kontrolle që nuk duhen ngatërruar

Supozoni se modeli i konsumit të ujit jep Q=100+3n. Për n=200 marrim 700 litra. Llogaritja është e saktë, sepse zëvendësimi në formulë është kryer pa gabime. Por nëse matësi tregon 900 litra, modeli nuk e përshkruan me saktësi atë ditë. Kjo mospërputhje nuk rrëzon algjebrën; ajo kërkon shqyrtimin e supozimeve. Mund të ketë pasur një rrjedhje, një veprimtari shtesë ose një ndryshim në konsumin mesatar. Nëse qëllimi është zgjedhja e një depoje rezervë, duhet të shqyrtojmë gjithashtu nëse nënvlerësimi prej 200 litrash është i pranueshëm. Për një ushtrim ilustrues mund të mjaftojë një përafrim i trashë; për sigurimin e furnizimit, i njëjti përafrim mund të jetë i papranueshëm.

Prandaj verifikimi i llogaritjeve, krahasimi me matjet dhe përshtatshmëria për vendimmarrje janë kontrolle të ndryshme; saktësia e deduksionit dallohet nga verifikimi i zbatimit. Studenti duhet të jetë në gjendje të shpjegojë se cilin prej tyre po kryen dhe çfarë dëshmie i nevojitet.

1.3. Modelet shpjeguese dhe empirike

Një model mekanistik ndërtohet nga ligje ose mekanizma të argumentuar; një model empirik ndërtohet nga rregullsitë e të dhënave. Modelet hibride kombinojnë të dyja qasjet. Një përafrim i mirë numerik nuk provon një marrëdhënie shkakësore.

1.4. Modelimi si metodë e kërkimit shkencor

Një problem shkencor nuk fillon domosdoshmërisht me një ekuacion. Ai fillon me një pyetje për një sistem: çfarë dëshirojmë të shpjegojmë, të parashikojmë ose të kontrollojmë? Në mekanikën klasike, idealizimi i trupit si pikë materiale lejon studimin e lëvizjes pa përshkruar formën e trupit. Në demografi, përfaqësimi i popullsisë me një madhësi numerike shmang përkohësisht strukturën sipas moshës. Në të dy rastet, përzgjedhja është e lidhur me pyetjen, jo me pretendimin se aspektet e përjashtuara nuk ekzistojnë.

Modelimi mund të ketë qëllim përshkrues, shpjegues, parashikues ose normativ. Një model përshkrues sintetizon vëzhgimet; një model shpjegues propozon një mekanizëm; një model parashikues vlerëson rezultate ende të pavëzhguara; një model normativ ndihmon në zgjedhjen e një veprimi sipas një kriteri. I njëjti formalizim mund të shërbejë për disa qëllime, por dëshmitë që kërkohen për secilin ndryshojnë. Për shembull, një lidhje statistikore e dobishme për parashikim nuk është vetvetiu shpjegim shkakësor.

1.5. Abstraksioni, idealizimi dhe përafrimi

Përkufizim. Abstraksioni është përzgjedhja e vetive që do të përfaqësohen; idealizimi është zëvendësimi i një karakteristike reale me një kusht të thjeshtuar; përafrimi është zëvendësimi i një objekti ose vlere me një tjetër që është mjaftueshëm afër sipas një kriteri të deklaruar. Këto procese mund të bashkëjetojnë, por nuk janë sinonime.

Shembull: për të vlerësuar kohën e mbushjes së një ene, zgjedhim vëllimin dhe kohën (abstraksion), marrim prurjen konstante (idealizim) dhe rrumbullakojmë një matje 19,8 L/min në 20 L/min (përafrim). Nëse duam të mbushim 100 L, koha e llogaritur me prurjen e rrumbullakosur është 5 min, ndërsa me 19,8 L/min është afërsisht 5,0505 min. Diferenca prej rreth 3,03 sekondash mund të jetë e pranueshme për një demonstrim shkollor, por jo domosdoshmërisht për një proces industrial me tolerancë të ngushtë.

1.6. Ndryshoret, parametrat dhe kufizimet

Ndryshorja përfaqëson një madhësi që mund të marrë vlera të ndryshme brenda modelit. Parametri përcakton një anëtar të familjes së modeleve. Dallimi është relativ ndaj eksperimentit: në modelin $T=d/v$, shpejtësia v mund të trajtohet si parametër në një studim të varësisë nga distanca, ose si ndryshore hyrëse në një studim të ndikimit të shpejtësisë.

Një kufizim është një kusht që duhet të plotësohet nga gjendjet ose vendimet e lejueshme. Për shembull, në një problem shpërndarjeje me buxhet B, sasitë x dhe y duhet të plotësojnë $x \ge 0$, $y \ge 0$ dhe $px+qy \le B$, ku p dhe q janë çmimet për njësi. Zgjidhja e një ekuacioni pa kontrolluar kufizimet mund të

japë rezultat matematikisht korrekt, por të papranueshëm për problemin.

Njësitë janë pjesë e kuptimit të parametrave. Në T(n)=an+b, kur T matet në minuta dhe n në numër nxënësish, a interpretohet si minuta për nxënës dhe b si minuta. Në modelin kuadratik, koeficienti i n^2 ka njësi minuta për katrorin e numrit të nxënësve. Ky interpretim nuk provon se parametri përfaqëson një mekanizëm fizik të veçantë.

2. Themelet epistemologjike

Vërtetimi i një teoreme mbështetet në deduksionin logjik. Vlerësimi i një modeli empirik kërkon edhe të dhëna, kontroll të supozimeve dhe përcaktim të qëllimit. Pa supozime shtesë mbi familjen e modeleve dhe procesin e matjes, një numër i fundëm matjesh nuk garanton vlefshmëri universale.

2.1. Ushtrim apo problem modelimi?

Në një ushtrim, struktura matematikore zakonisht jepet; në modelim studenti duhet ta përzgjedhë dhe ta argumentojë atë. Për shembull, planifikimi i një ekskursioni kërkon më shumë se zbatimin e formulës së shpejtësisë.

2.2. Identifikueshmëria dhe ekonomia e modelit

Parametrat janë të identifikueshëm nëse informacioni i disponueshëm i përcakton në mënyrë të vetme brenda familjes së zgjedhur. Një model më kompleks mund të zvogëlojë gabimin e kalibrimit pa përmirësuar parashikimin. Përzgjedhja kërkon të dhëna të pavarura dhe interpretim të parametrave.

2.3. Pohim — Kufizimi i informacionit të fundëm

Le të jenë $x_1,\dots,x_m$ pika të ndryshme dhe p një polinom që interpolon të dhënat. Për çdo λ real, polinomi

> $$q_\lambda\left(x\right) = p\left(x\right) + \lambda \prod_{i=1}^{m} \left(x - x_i\right)$$

interpolon të njëjtat të dhëna. Vërtetim: në secilën pikë x_j, faktori me i=j është zero. Për çdo x jashtë bashkësisë së pikave, prodhimi është jozero; duke ndryshuar λ mund të marrim çdo vlerë reale në atë pikë. Kjo nuk do të thotë se çdo polinom është fizikisht i pranueshëm: kufizimet dhe mekanizmi i dukurisë japin informacion shtesë.

Pse përputhja me matjet nuk mjafton?

Marrim tri matje hipotetike: në çastet 0, 1 dhe 2 vlerat janë përkatësisht 1, 2 dhe 3. Funksioni f(x)=x+1 i përshkruan të tria. Edhe funksioni g(x)=x+1+x(x−1)(x−2) i përshkruan po ato matje, sepse prodhimi shtesë bëhet zero në secilën pikë. Por në x=3, modeli i parë jep 4, ndërsa i dyti jep 10. Nuk kemi asnjë

arsye të zgjedhim modelin e dytë vetëm sepse ka më shumë terma; as modeli i parë nuk është i vërtetuar nga tri matjet. Përzgjedhja kërkon njohuri për dukurinë, matje të reja ose kufizime të argumentuara mbi familjen e funksioneve.

Për mësuesin, ky kundërshembull është një mënyrë për të dalluar zbulimin e një rregullsie nga vërtetimi i saj. Pyetja «cili është numri pasues?» nuk ka domosdoshmërisht përgjigje të vetme nëse rregulli i formimit nuk është përcaktuar. Në modelim, pikërisht ky informacion shtesë duhet kërkuar dhe argumentuar.

2.4. Nga hipoteza te dëshmitë

Një model ndërtohet mbi supozime të deklaruara. Disa janë strukturore, si zgjedhja e një varësie afine; disa janë parametrike, si marrja e një koeficienti konstant; disa lidhen me matjen, si supozimi se instrumenti nuk ka zhvendosje sistematike. Kur modeli nuk përputhet me vëzhgimet, nuk mund të përfundojmë menjëherë se vetëm njëri prej këtyre supozimeve është i gabuar. Duhet të shqyrtojmë edhe cilësinë e të dhënave, mënyrën e kalibrimit dhe zbatimin numerik.

Një test empirik nuk është vërtetim i një teoreme. Nëse një model parashikon një vlerë brenda tolerancës së përcaktuar, kemi dëshmi në favor të përdorimit të tij në kushtet e testuara. Nuk kemi provuar vlefshmëri universale. Në të kundërt, një mospërputhje e përsëritur dhe më e madhe se pasiguria e matjes mund të kërkojë rishikim të modelit.

2.5. Pohim: identifikueshmëria e modelit afin

Le të jenë $x_1 \neq x_2$ dhe y_1, y_2 dy vlera reale. Ekziston një funksion i vetëm afin $f(x)=ax+b$ që plotëson $f(x_1)=y_1$ dhe $f(x_2)=y_2$.

Vërtetim. Duke zbritur ekuacionet $ax_1+b=y_1$ dhe $ax_2+b=y_2$, marrim $a=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$. Meqë emëruesi nuk është zero, a përcaktohet në mënyrë të vetme. Pastaj $b=y_1-ax_1$. Zëvendësimi i këtyre vlerave në të dy ekuacionet provon ekzistencën. Uniciteti vlen brenda familjes afine, jo brenda bashkësisë së të gjitha funksioneve.

Kundërshembull. Për çdo λ real, funksioni $g(x)=f(x)+\lambda(x-x_1)(x-x_2)$ përputhet me të njëjtat dy vëzhgime. Kur $\lambda \neq 0$, ai nuk është afin. Pra, identifikimi i parametrave brenda një familjeje nuk duhet ngatërruar me identifikimin e vetë familjes.

2.6. Cikli i modelimit në praktikë

Në fazën e kuptimit formulohet pyetja dhe identifikohet rezultati që kërkohet. Në idealizim përcaktohen faktorët që ruhen dhe ata që lihen jashtë. Në matematizim ndërtohen ndryshoret, marrëdhëniet dhe kufizimet. Në fazën e zgjidhjes përdoren metodat analitike ose numerike. Interpretimi rikthen rezultatin në njësitë dhe kontekstin real. Vlerësimi i vlefshmërisë e krahason atë me dëshmitë dhe qëllimin. Rishikimi mund të prekë çdo fazë të mëparshme.

Për mësuesin, kjo strukturë nuk duhet shndërruar në një algoritëm të ngurtë. Një nxënës mund të vizatojë fillimisht një grafik, të vërejë se mungojnë të dhëna dhe të rikthehet te formulimi i problemit. Një tjetër mund të ndërtojë një formulë dhe ta refuzojë pas kontrollit të njësive. Të dyja rrugët mund

të jenë produktive, nëse arsyetimi dokumentohet.

3. Studime rasti

3.1. Udhëtimi

Për distancën d në km, shpejtësinë mesatare gjatë lëvizjes v>0 në km/orë dhe ndalesat p në minuta, T=60d/v+p. Vonesat shtesë përfshihen vetëm nëse nuk janë llogaritur tashmë në v ose p.

3.2. Rezervuari

Për k=0, koha e mbushjes është 20 min. Për k=0,2 min^{-1}, V(t)=200 L për çdo t≥0. Bilanci pas mbushjes përfshin derdhjen: V′=40−kV−q, ku q=40−1000k vetëm pas mbushjes për 0≤k<0,04 min^{-1}; për regjimet e tjera q=0.

Me vëllim fillestar 200 L, prurje 40 L/min dhe kapacitet 1000 L, modeli pa konsum është min(1000,200+40t), për t≥0, duke supozuar derdhjen e tepricës. Me konsum konstant c∈[0,40], zëvendësojmë 40 me 40−c. Me humbje proporcionale kV, zgjidhja e pakufizuar është V(t)=40/k+(200−40/k)e^{-kt}, k>0. Ekuilibri 40/k është globalisht asimptotikisht i qëndrueshëm në modelin e pakufizuar. Kufizimi fizik kërkon modelim të derdhjes në kufirin 1000 L.

3.3. Argumentimi i modelit të rezervuarit

Regjimet e plota: për k=0, V=min(1000,200+40t), mbushja pas 20 min dhe derdhja 40 L/min. Për 0<k<0,04 min^{-1}, mbushja është e fundme; për k=0,04, V rritet drejt 1000 L pa e arritur. Për 0,04<k<0,2, V rritet drejt 40/k<1000; për k=0,2 mbetet 200 L; për k>0,2 zvogëlohet drejt 40/k. Supozohet k≥0, hyrje konstante dhe derdhje e menjëhershme e tepricës. Në eksponentin kt, k ka njësi min^{-1} dhe t njësi min.

Bilanci i vëllimit është prurja hyrëse minus prurja dalëse. Për humbje kV, shumëzojmë ekuacionin V′+kV=40 me e^{kt} dhe integrojmë duke përdorur V(0)=200.

$$V\left(t\right) = \frac{40}{k} + \left(200 - \frac{40}{k}\right) e^{-kt}$$

Kontrolli: në t=0 rezulton 200; derivimi jep V′=40−kV. Për k>0, diferenca nga ekuilibri zvogëlohet eksponencialisht. Nëse 40/k>1000, modeli i pakufizuar nuk mund të përdoret pas mbushjes; duhet përfshirë derdhja. Ky është ilustrim, jo trajtimi i plotë i sistemeve dinamike.

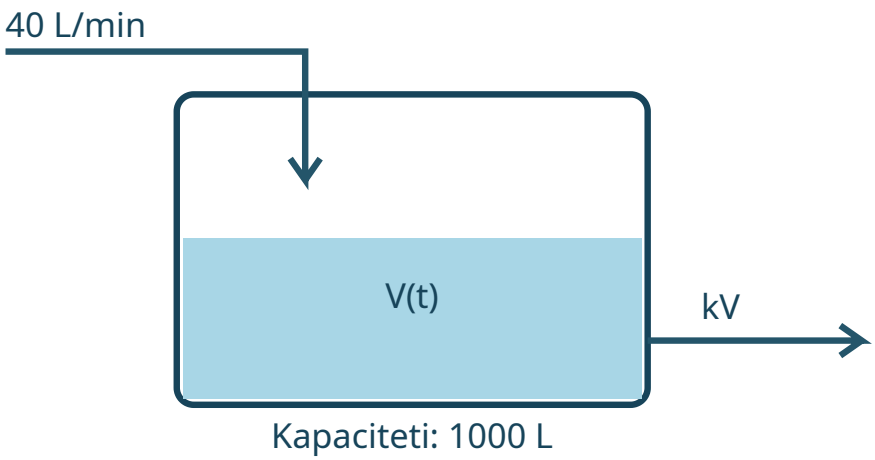


Figura 1.2. Bilanci i prurjeve; skemë konceptuale, jo vizatim në shkallë.

Kapaciteti dhe koha e mbushjes. Për $0<k<0{,}04$ min^{-1}, ekuilibri i modelit të pakufizuar është mbi kapacitetin. Nga kushti $V(t^*)=1000$ përftojmë $t^*=(1/k)\ln[(40-200k)/(40-1000k)]$. Pas kësaj kohe, nëse teprica derdhet menjëherë, vëllimi mbetet 1000 L dhe prurja e derdhjes është $40-1000k$ L/min. Për $k=0{,}04$ min^{-1}, kapaciteti arrihet vetëm në limit; për $k>0{,}04$ min^{-1}, vëllimi nuk e arrin kapacitetin. Nëse $k>0{,}2$ min^{-1}, vëllimi fillestar zvogëlohet drejt ekuilibrit. Këto raste tregojnë se rritja e vëllimit nuk është një përfundim universal i modelit.

Leximi i zgjidhjes diferenciale në gjuhën e dukurisë

Parametri k nuk është një sasi uji, por një koeficient me njësi minutë$^{-1}$. Kur $k=0{,}05$ minutë$^{-1}$, humbja e çastit në vëllimin 200 litra është 10 litra në minutë. Prurja neto fillestare është 30 litra në minutë. Me rritjen e vëllimit, rritet edhe humbja, ndaj mbushja ngadalësohet. Vëllimi i ekuilibrit është 800 litra. Në atë gjendje humbja $0{,}05\cdot800$ barazon prurjen 40. Nga zgjidhja $V(t)=800-600e^{-0{,}05t}$, ku t shprehet numerikisht në minuta, shihet se vëllimi rritet drejt 800 pa e arritur në kohë të fundme. Kapaciteti prej 1000 litrash nuk bëhet kufizim veprues në këtë rast.

Nëse $k=0{,}02$ minutë$^{-1}$, ekuilibri i modelit të pakufizuar është 2000 litra, pra mbi kapacitetin fizik. Depoja arrin 1000 litra kur $e^{-0{,}02t}=5/9$, domethënë pas rreth 29,39 minutash. Pas këtij çasti, nëse teprica derdhet lirisht, vëllimi mbetet 1000 litra dhe derdhja është 20 litra në minutë. Ky përfundim nuk merret duke vazhduar verbërisht formulën fillestare, por duke ndryshuar përshkrimin matematikor në kufirin fizik. Këtu qëndron një nga detyrat kryesore të modelimit: të përcaktojë jo vetëm zgjidhjen, por edhe kushtet në të cilat ajo përfaqëson dukurinë.

3.4. Studim rasti shtesë: zgjedhja e një tarife

Një shkollë krahason dy oferta hipotetike për printimin e materialeve. Oferta A kërkon 500 lekë tarifë fikse dhe 4 lekë për faqe; oferta B nuk ka tarifë fikse dhe kërkon 6 lekë për faqe. Modelet janë $A(n)=500+4n$ dhe $B(n)=6n$, për n numër të plotë jonegativ.

Barazimi $A(n)=B(n)$ jep $n=250$. Për $n<250$, B është më ekonomike; për $n>250$, A është më ekonomike. Për $n=250$, të dyja kushtojnë 1500 lekë. Kjo zgjidhje mbështetet në supozimin se çmimi për faqe nuk ndryshon dhe se cilësia e shërbimit është e krahasueshme.

Nëse shkolla nuk e njeh paraprakisht numrin e faqeve, një vendim i vetëm kërkon informacion shtesë për intervalin e mundshëm ose shpërndarjen e kërkesës. Për shembull, nëse n mund të jetë 200 ose 300, oferta A kushton përkatësisht 1300 ose 1700 lekë, ndërsa B kushton 1200 ose 1800 lekë. Pa një kriter vendimmarrjeje nuk ka një ofertë që dominon në të dy skenarët.

3.5. Studim rasti: matja indirekte

Një shtyllë vertikale me lartësi të panjohur h krijon një hije 6 m. Në të njëjtën kohë një objekt vertikal 1,5 m krijon hije 2 m. Nëse toka është horizontale dhe rrezet e diellit trajtohen si paralele, ngjashmëria e trekëndëshave jep h/6=1,5/2, prandaj h=4,5 m.

Modeli është mekanistik: marrëdhënia rrjedh nga gjeometria dhe supozimet, jo nga përshtatja e një kurbe. Nëse toka ka pjerrësi ose matjet kryhen në kohë të ndryshme, argumenti i ngjashmërisë kërkon rishikim. Nëse hija e shtyllës matet me gabim maksimal 0,1 m dhe raporti 1,5/2 merret i saktë, gabimi maksimal i lartësisë së llogaritur është 0,075 m. Ky është kufi i kushtëzuar, jo vlerësim i gjithë pasigurisë së eksperimentit.

3.6. Sintezë profesionale

Në kontekstet e transportit, rezervuarit, tarifave dhe matjes indirekte, zgjedhja e modelit varet nga qëllimi. Mësuesi duhet të dallojë gabimin në llogaritje nga gabimi në përfaqësim. Një nxënës që zgjedh një model të thjeshtë, por argumenton kufizimet e tij, mund të demonstrojë kompetencë modeluese më të zhvilluar se një nxënës që përdor një formulë të ndërlikuar pa interpretim.

4. Thellim teorik: struktura dhe vlerësimi i modeleve

Lexim i pavarur: identifikueshmëria, familjet e ndërfutura dhe protokolli i vlerësimit. Në auditor përdoren vetëm përfundimet e nevojshme për rastin e bibliotekës.

4.1. Perspektiva historike dhe metodologjike

Modelimi matematik nuk është një degë e izoluar e matematikës, por një mënyrë e organizimit të njohjes. Gjeometria e matjes së tokës, astronomia matematikore dhe mekanika klasike ilustrojnë tri forma të hershme të kalimit nga vëzhgimi te përfaqësimi sasior. Në mekanikën klasike, për shembull, përshkrimi i një trupi si pikë materiale nuk nënkupton se trupi nuk ka përmasa: nënkupton se përmasat e tij nuk janë vendimtare për pyetjen që po studiohet. Ky dallim është thelbësor edhe në mësimdhënie, sepse nxënësi duhet të kuptojë se objekti matematikor nuk është identik me objektin fizik.

Me zhvillimin e statistikës, ekuacioneve diferenciale dhe metodave numerike, modelimi u zgjerua nga përshkrimi i ligjësive ideale drejt analizës së sistemeve të ndërlikuara, të dhënave të paplota dhe vendimmarrjes. Një model mund të ndërtohet për të shpjeguar një mekanizëm, për të parashikuar një rezultat ose për të zgjedhur ndërmjet alternativave. Këto qëllime nuk janë të njëjta. Një formulë që parashikon mirë brenda një intervali të matur nuk jep domosdoshmërisht shpjegim shkakësor; një model shpjegues mund të ketë saktësi të kufizuar numerike për shkak të parametrave të panjohur.

4.2. Klasifikimi sipas strukturës matematikore

Modeli afin an+b është linear ndaj parametrave a,b, por linear ndaj n vetëm kur b=0. Modeli kuadratik është linear ndaj parametrave, jo përgjithësisht ndaj n.

Një klasifikim i dobishëm nuk mbështetet vetëm në emrin e funksionit. Duhet të përcaktojmë natyrën e ndryshoreve, mënyrën e përfaqësimit të kohës, praninë e rastësisë dhe rolin e parametrave. I njëjti model mund t'i përkasë disa kategorive njëkohësisht.

Kriteri	Kategoritë	Shembull dhe interpretim
Rastësia	Determinist / stokastik	Bilanci i ujit me prurje fikse / prurje e rastit
Koha	Diskret / i vazhdueshëm	Gjendja ditore e një magazine / temperatura gjatë kohës
Gjendja	Statik / dinamik	Kostoja për një sasi / evolucioni i një popullsie
Struktura	Linear / jolinear	Operator linear / rritje logjistike
Origjina	Mekanistik / empirik / hibrid	Ligj ruajtjeje / regresion / ligj me parametra të kalibruar

Diskretizimi i kohës nuk e bën automatikisht modelin stokastik. Një marrëdhënie rekursive $x_{n+1} = 0{,}9x_n$ është deterministe, edhe pse koha merr vetëm vlera të plota. Në anën tjetër, një proces me kohë të vazhdueshme mund të përmbajë rastësi. Po kështu, lineariteti ndaj parametrave nuk është i njëjtë me linearitetin ndaj ndryshores së pavarur: $y = a + bx^2$ është linear ndaj parametrave a dhe b, por përgjithësisht jo ndaj x.

4.3. Ekuivalenca e modeleve dhe roli i përfaqësimit

Përkufizim. Dy modele janë ekuivalente në kuptimin e parashikimit në një bashkësi D nëse japin të njëjtën madhësi të vëzhgueshme për çdo hyrje në D, pas përshtatjes së njësive dhe parametrave. Ekuivalenca e parashikimit nuk kërkon që interpretimet e brendshme të modeleve të jenë të njëjta.

Shembull. Për kohën fizike t dhe hapin $\Delta t > 0$, $M(t)=A\cdot\exp(kt)$ dhe $N(t)=A\cdot b^{t/\Delta t}$, ku $b=\exp(k\Delta t)$, janë ekuivalente. Parametri k ka njësi kohë$^{-1}$; kt dhe $t/\Delta t$ janë pa njësi. Kur $A \neq 0$, faktori b është raporti i vlerave pas një hapi Δt. Identiteti $b^{t/\Delta t}=\exp((t/\Delta t)\ln b)=\exp(kt)$ vërteton barazinë.

Pohim. Ekuivalenca e dy funksioneve në një bashkësi të fundme nuk sjell ekuivalencën e tyre në një interval. Në fakt, nëse $D=\{x_1,\dots,x_n\}$, atëherë për çdo funksion f dhe çdo konstante c, funksioni $g(x)=f(x)+c\prod(x-x_i)$ përputhet me f në D. Për c jozero dhe x jashtë D, diferenca është jozero. Ky konstruksion tregon pse përputhja me të dhënat nuk është provë e unicitetit të ligjit matematikor.

4.4. Vlefshmëria, gabimi dhe ndjeshmëria

Shembull i renditjes së ndryshme: mbetjet (0,0,6) japin MAE=2 dhe RMSE=√12; mbetjet (3,3,3) japin MAE=RMSE=3. Krahasimi bëhet mbi të njëjtat vëzhgime dhe njësi.

Verifikimi i një modeli kontrollon nëse formulimi dhe zbatimi përputhen me hipotezat e deklaruara. Vlerësimi i vlefshmërisë kontrollon nëse modeli është i përshtatshëm për qëllimin dhe kushtet e përdorimit. Një program mund të zbatojë saktësisht një ekuacion të papërshtatshëm; prandaj këto dy kontrolle duhen dokumentuar veçmas. Për shembull, një model linear i konsumit të energjisë mund të jetë i dobishëm për një interval të ngushtë temperaturash, por jo për parashikime në kushte ekstreme.

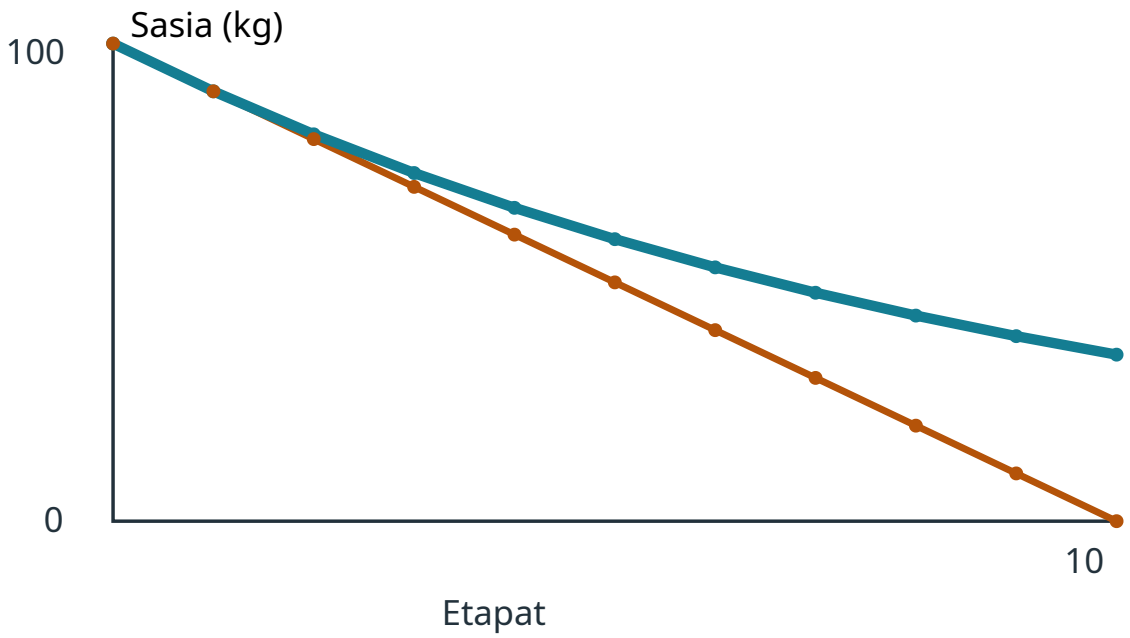
Le të jenë y_i vëzhgimet dhe $\hat{y}_i$ parashikimet. Mbetja e vëzhgimit i është $r_i = y_i - \hat{y}_i$. Mesatarja e mbetjeve mund të jetë zero edhe kur gabimet individuale janë të mëdha. Për këtë arsye përdorim, ndër të tjera, $\mathrm{MAE} = (1/n)\Sigma|r_i|$ dhe $\mathrm{RMSE} = \sqrt{(1/n)\Sigma r_i^2}$. Të dy treguesit kanë njësinë e madhësisë së vëzhguar. RMSE i jep peshë më të madhe gabimeve të mëdha.

Pohim. Për çdo varg të fundëm jo të zbrazët mbetjesh, $\mathrm{MAE} \le \mathrm{RMSE}$. Nga pabarazia Cauchy–Schwarz kemi $(\Sigma|r_i|)^2 \le n\Sigma r_i^2$. Duke pjesëtuar me n^2 dhe duke marrë rrënjën katrore, përftojmë rezultatin. Barazia arrihet pikërisht kur të gjitha $|r_i|$ janë të barabarta. Ky rezultat shpjegon matematikisht pse dy treguesit mund të japin renditje të ndryshme për modele alternative.

Ndjeshmëria lokale e një madhësie M ndaj një parametri θ, kur derivati ekziston, përshkruhet nga $\partial M/\partial\theta$. Për një ndryshim të vogël $\Delta\theta$, ndryshimi i parashikimit përafrohet me $(\partial M/\partial\theta)\Delta\theta$. Kur θ dhe M janë jozero, madhësia pa njësi $(\theta/M)(\partial M/\partial\theta)$ mundëson krahasimin e ndjeshmërisë ndaj parametrave me njësi të ndryshme. Ky është një tregues lokal, jo një garanci për ndryshime të mëdha.

4.5. Studim rasti: humbjet gjatë transportit

Një sasi fillestare prej 100 kg transportohet nëpër tri etapa. Në çdo etapë humbet 10% e sasisë që hyn në atë etapë. Modeli A zbret 10 kg në çdo etapë; modeli B shumëzon sasinë me 0,9. Modeli A jep 70 kg, ndërsa modeli B jep 72,9 kg. Modeli B përputhet me hipotezën e deklaruar; modeli A do të ishte i përshtatshëm vetëm nëse humbja absolute do të ishte konstante. Pas n etapash, modelet janë $A(n) = 100 - 10n$ dhe $B(n) = 100 \cdot 0{,}9^n$. Modeli A bëhet negativ për n më të madh se 10, duke shkelur kufizimin fizik të jonegativitetit.



Humbja absolute (vija e drejtë) dhe humbja relative (vija e lakuar); vlerat për etapat e plota lidhen për lehtësi leximi.

Pyetja didaktike nuk është thjesht cili rezultat është i saktë, por cilat të dhëna do të na lejonin të dallonim mekanizmat. Matja pas etapës së parë nuk mjafton, sepse të dy modelet japin 90 kg. Matja pas etapës së dytë i dallon në kushte ideale: 80 kundrejt 81 kg. Në praktikë, pasiguria e matjes mund ta bëjë këtë diferencë të pamjaftueshme.

4.6. Kompetenca modeluese në formimin e mësuesit

Në përputhje me orientimin e literaturës së Niss dhe Blum, kompetenca modeluese nuk reduktohet në aftësinë për të zgjidhur ekuacione. Ajo përfshin kalimin e argumentuar ndërmjet situatës reale dhe matematikës, interpretimin dhe vlerësimin kritik. Për këtë libër propozojmë një operacionalizim didaktik në katër dimensione: formulimi i problemit, ndërtimi matematikor, interpretimi kritik dhe komunikimi. Kjo ndarje është instrument pune i autores, jo riprodhim i një shkalle të standardizuar nga literatura.

Mësuesi duhet të dallojë një gabim algjebrik nga një gabim modelimi. Nxënësi mund të kryejë të gjitha veprimet saktë, por të zgjedhë një model të papërshtatshëm. Për shembull, në problemin e humbjeve, zbritja e 10 kg në çdo etapë është aritmetikisht e saktë sipas modelit A, por nuk respekton kuptimin e përqindjes së sasisë aktuale. Ndërhyrja didaktike duhet të kërkojë argumentimin e hipotezës, jo vetëm korrigjimin e rezultatit.

Vlerësimi i një detyre modelimi duhet të pranojë alternativa të argumentuara. Kur të dhënat nuk përcaktojnë një model unik, mësuesi vlerëson koherencën e hipotezave, përdorimin e njësive, saktësinë e zgjidhjes, interpretimin dhe kufizimet. Një përgjigje numerike pa interpretim nuk është dëshmi e plotë e kompetencës. Në klasat VI–XII, kompleksiteti i formalizimit duhet të përshtatet me përgatitjen e nxënësve; lidhjet e sakta me rezultatet zyrtare të të nxënit kërkojnë ende verifikim dokumentar.

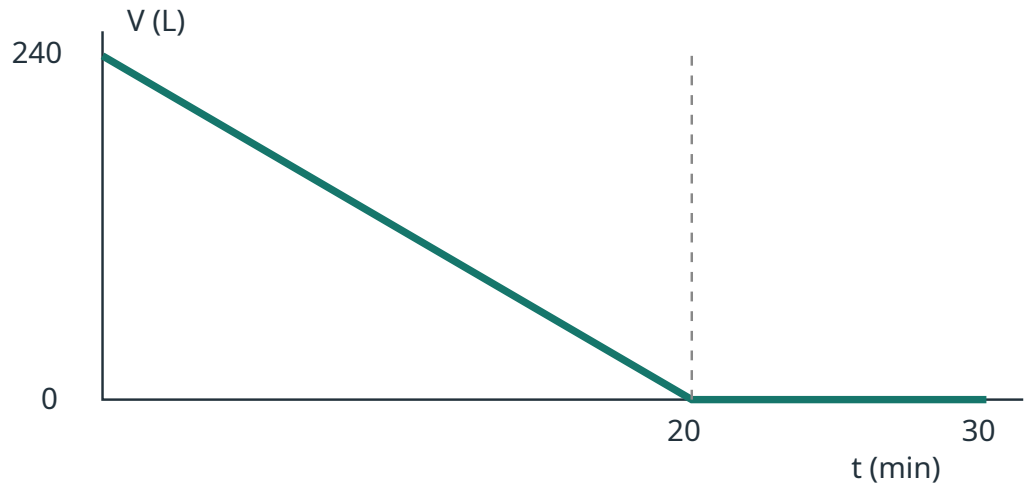
4.7. Bashkësia e gjendjeve të mundshme dhe kufizimet fizike

Në modelin e zbrazjes, derivatet e njëanshme në t=20 janë −12 L/min dhe 0 L/min. Grafiku përdor shkallë horizontale 12 njësi grafike për minutë.

Një model nuk përcaktohet vetëm nga barazimet që lidhin ndryshoret. Ai përfshin edhe bashkësinë e vlerave të lejueshme, njësitë e matjes dhe kushtet në të cilat marrëdhëniet matematikore përfaqësojnë dukurinë. Për shembull, një numër nxënësish është numër i plotë jonegativ, ndërsa koha e pritjes mund të përfaqësohet nga një numër real jonegativ. Zëvendësimi i një ndryshoreje diskrete me një ndryshore të vazhdueshme është një idealizim që duhet argumentuar. Ai mund të jetë i dobishëm për të studiuar prirjen e përgjithshme, por jo për të marrë vendime që kërkojnë numra të plotë.

Përkufizim. Bashkësia e lejueshme e një modeli është bashkësia e vlerave të ndryshoreve dhe parametrave që plotësojnë njëkohësisht kufizimet matematikore dhe kushtet e vendosura nga dukuria e studiuar. Ajo nuk duhet ngatërruar me bashkësinë e përcaktimit të një shprehjeje algjebrike. Një polinom mund të përcaktohet në gjithë boshtin real, por modeli që ai përfaqëson mund të ketë kuptim vetëm në një interval të kufizuar.

Shembull. Një depo përmban 240 litra ujë dhe zbrazet me prurje konstante 12 litra në minutë. Shprehja V(t)=240−12t përcaktohet për çdo t real, por modeli i zbrazjes vlen për 0≤t≤20. Nëse kërkohet përshkrimi edhe pas zbrazjes, në mungesë të furnizimit të ri, përdorim V(t)=max(0,240−12t), për t≥0. Ky funksion është i vazhdueshëm, por nuk është i derivueshëm në t=20. Mungesa e derivatit nuk është mangësi e modelit: ajo shpreh ndryshimin e regjimit fizik.



Ndryshimi i regjimit të zbrazjes në çastin t=20 minuta.

4.8. Ligjet e ruajtjes si burim i modeleve

Në shumë probleme modelimi, marrëdhënia themelore nuk nxirret nga përshtatja e një kurbe me matjet, por nga bilanci i një madhësie. Për një sistem të përcaktuar, ndryshimi i sasisë gjatë një intervali kohor është i barabartë me sasinë që hyn, minus sasinë që del, plus sasinë që krijohet

brenda sistemit, minus sasinë që konsumohet. Përpara shkrimit të ekuacionit duhet të përcaktohen kufijtë e sistemit. Një madhësi që është hyrëse për një sistem mund të jetë e brendshme për një sistem më të gjerë.

Le të jetë Q(t) sasia e një lënde në çastin t dhe r(t) prurja neto, e matur në njësi sasie për njësi kohe. Nëse r është funksion i vazhdueshëm, bilanci jep

$$Q\left(t\right) = Q\left(0\right) + \int_0^t r\left(s\right) ds$$

Nga teorema themelore e analizës matematike rrjedh Q′(t)=r(t). Nëse prurja varet edhe nga gjendja e sistemit, marrim një ekuacion diferencial. Kjo lidhje shpjegon përse ekuacionet diferenciale shfaqen natyrshëm në modelimin e proceseve dinamike. Nuk është e nevojshme që nxënësit e arsimit parauniversitar të njohin ekuacionet diferenciale për të kuptuar idenë e bilancit: ata mund ta zbatojnë atë në intervale kohore të njëpasnjëshme, duke përdorur mbledhjen dhe zbritjen.

Shembull i zgjidhur. Në një enë hyjnë 8 litra ujë në minutë për 10 minutat e para dhe 3 litra në minutë për 10 minutat pasuese. Dalja është 5 litra në minutë gjatë gjithë kohës dhe sasia fillestare është 50 litra. Për 0≤t≤10 kemi Q(t)=50+3t. Në çastin t=10 sasia është 80 litra. Për 10≤t≤20 kemi Q(t)=80−2(t−10). Në fund mbeten 60 litra. Të dyja shprehjet japin 80 në pikën e bashkimit. Nëse ena ka kapacitet më të vogël se 80 litra, modeli duhet ndryshuar për të përfshirë derdhjen. Kështu, një kusht fizik mund të ndryshojë strukturën e modelit edhe kur llogaritjet algjebrike janë të sakta.

4.9. Shkalla e matjes dhe pandryshueshmëria ndaj njësive

Një model i një dukurie fizike duhet të japë të njëjtin përfundim fizik kur ndryshohen njësitë e matjes në mënyrë të njëtrajtshme. Në modelin s=vt, nëse largësia matet në kilometra dhe koha në orë, shpejtësia matet në kilometra për orë. Nëse koha shprehet në minuta, koeficienti numerik i shpejtësisë duhet pjesëtuar me 60. Numri që përfaqëson parametrin ndryshon, por madhësia fizike nuk ndryshon. Ky dallim është thelbësor në interpretimin e koeficientëve të një modeli.

Kundërshembull. Shprehja s=v+t nuk mund të përfaqësojë largësinë kur v është shpejtësi dhe t është kohë: mbledhja e madhësive me përmasa fizike të ndryshme nuk ka kuptimin e kërkuar. Përputhja e përmasave fizike është kusht i nevojshëm, por jo i mjaftueshëm për vlefshmërinë. Edhe shprehja s=2vt ka përmasën e largësisë, por nuk përshkruan lëvizjen me shpejtësi konstante v nga pika fillestare zero. Prandaj kontrolli i njësive zbulon disa gabime, por nuk zëvendëson arsyetimin mbi dukurinë.

4.10. Qëndrueshmëria e përfundimeve ndaj gabimeve të matjes

Matjet nuk japin zakonisht vlera të sakta të madhësive. Për këtë arsye, një përfundim i modelit duhet shqyrtuar edhe në raport me ndryshimet e vogla të të dhënave hyrëse. Një model mund të jetë i përcaktuar në mënyrë të vetme dhe megjithatë të jetë shumë i ndjeshëm ndaj gabimeve të matjes. Identifikueshmëria dhe qëndrueshmëria janë, pra, dy çështje të ndryshme.

Pohim. Nëse f është i vazhdueshëm në intervalin e mbyllur I dhe i derivueshëm në brendësi të tij, me |f′(x)|≤K për çdo x në brendësi të I, ku K≥0, atëherë për çdo x,y∈I kemi |f(x)−f(y)|≤K|x−y|.

Vërtetim. Për $x=y$ pohimi është i menjëhershëm. Për $x\neq y$, nga teorema e vlerës së mesme ekziston një pikë ξ ndërmjet x dhe y e tillë që $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$. Duke marrë vlerat absolute dhe duke përdorur kufizimin e derivatit, marrim pabarazinë e kërkuar. Kështu, nëse gabimi i hyrjes nuk e tejkalon ε, gabimi i daljes nuk e tejkalon $K\varepsilon$. Ky është një kufi i garantuar, jo një parashikim i gabimit faktik.

Shembull. Sipërfaqja e një disku me rreze r është $A(r)=\pi r^2$. Për $r\in[9{,}9;\ 10{,}1]$ cm, derivati plotëson $|A'(r)|\le 20{,}2\pi$ cm. Nëse rrezja e matur është 10 cm dhe gabimi nuk e tejkalon 0,1 cm, gabimi i sipërfaqes nuk e tejkalon $2{,}02\pi$ cm². Llogaritja e drejtpërdrejtë jep intervalin $[98{,}01\pi;\ 102{,}01\pi]$ cm². Krahasimi i dy mënyrave tregon se kufiri i nxjerrë nga derivati është i sigurt, por jo domosdoshmërisht më i ngushti.

4.11. Nga modeli te vendimi: roli i kriterit të zgjedhjes

Dy modele që japin rezultate të ndryshme nuk mund të renditen pa përcaktuar qëllimin e përdorimit. Nëse qëllimi është parashikimi i një vlere mesatare, gabimet pozitive dhe negative mund të kenë rëndësi të njëjtë. Nëse qëllimi është planifikimi i kapacitetit të një shërbimi, nënvlerësimi i kërkesës mund të ketë pasoja më të mëdha se mbivlerësimi. Kriteri i zgjedhjes duhet të shprehë këtë ndryshim, jo thjesht të merret nga një formulë e gatshme.

Le të jetë y kërkesa e vëzhguar dhe m parashikimi. Mund të përcaktojmë humbjen $L(y,m)=3\max(y-m,0)+\max(m-y,0)$. Koeficientët 3 dhe 1 janë supozime të shprehura hapur mbi koston relative të gabimeve. Për kërkesën 100 njësi, parashikimi 90 ka humbje 30, ndërsa parashikimi 115 ka humbje 15. Megjithëse gabimi absolut i parashikimit të parë është më i vogël, kriteri i vendosur favorizon të dytin. Nuk pretendohet se ky kriter është universal; ai duhet argumentuar me të dhëna mbi pasojat e vendimit.

Për mësuesin, ky shembull është i rëndësishëm sepse zhvendos vëmendjen nga kërkimi i një përgjigjeje të vetme drejt argumentimit të kriterit. Nxënësi duhet të shpjegojë jo vetëm si llogariti, por edhe përse llogaritja është e përshtatshme për pyetjen e shtruar. Në vlerësim duhet dalluar gabimi matematikor nga një zgjedhje e diskutueshme e supozimeve. Një model alternativ i argumentuar nuk duhet penalizuar vetëm sepse nuk përputhet me zgjidhjen e parashikuar nga mësuesi.

4.12. Identifikueshmëria nga vëzhgimet dhe qëndrueshmëria e përcaktimit të parametrave

Le të jetë M një familje modelesh me parametra $\theta\in\Theta$ dhe le të jenë $x_1,\dots,x_m$ pikat e vëzhgimit. Përcaktojmë funksionin e vëzhgimit $F:\Theta\to\mathbb{R}^m$, $F(\theta)=(M(x_1;\theta),\dots,M(x_m;\theta))$. Parametrat janë globalisht të identifikueshëm nga ky plan vëzhgimi pikërisht kur F është injektiv. Ky përkufizim lidhet me vëzhgime ideale, pa gabime; ai nuk garanton që përcaktimi numerik i parametrave nga matjet reale të jetë i qëndrueshëm.

Shembull. Për $M(x;a,b)=ax+b$, dy vëzhgime në pika të ndryshme përcaktojnë parametrat në mënyrë të vetme. Nëse matjet y_1 dhe y_2 ndryshojnë përkatësisht me δ_1 dhe δ_2, atëherë ndryshimi i koeficientit këndor është $\Delta a=(\delta_2-\delta_1)/(x_2-x_1)$. Nëse $|\delta_i|\le\varepsilon$, rezulton $|\Delta a|\le 2\varepsilon/|x_2-x_1|$. Kufiri arrihet kur

gabimet kanë shenja të kundërta dhe madhësi ε. Prandaj dy pika shumë pranë njëra-tjetrës mund të japin një problem të identifikueshëm, por të ndjeshëm ndaj gabimeve të matjes. Zgjedhja e pikave të matjes është pjesë e modelimit, jo vetëm e përpunimit të të dhënave.

Saktësim konceptual. Injektiviteti i funksionit të vëzhgimit për një grup të caktuar pikash është identifikueshmëri globale nga ato vëzhgime ideale. Identifikueshmëria strukturore në kuptimin e modeleve dinamike shqyrton zakonisht përgjigjen ideale të plotë të sistemit për hyrjet dhe daljet e përcaktuara. Dy nocionet lidhen, por nuk duhen barazuar pa përcaktuar skemën e vëzhgimit.

4.13. Pohim: gabimi minimal në familje të ndërfutura modelesh

Le të jenë $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2$ dy familje jo të zbrazëta funksionesh të përcaktuara në të gjitha pikat e matjes dhe $S(f) = \Sigma_i (y_i - f(x_i))^2$. Atëherë inf S mbi $\mathscr{F}_2$ nuk është më i madh se inf S mbi $\mathscr{F}_1$.

Vërtetim. Çdo funksion i $\mathscr{F}_1$ është edhe element i $\mathscr{F}_2$. Infimumi mbi $\mathscr{F}_2$ është kufi i poshtëm për vlerat e S mbi $\mathscr{F}_1$, prandaj nuk mund të jetë më i madh se infimumi mbi $\mathscr{F}_1$. Kur minimumet arrihen, pohimi vlen për minimumet përkatëse. □

Ky rezultat shpjegon pse modeli kuadratik i laboratorit nuk mund të ketë gabim më të madh kalibrimi se modeli afin. Nuk jep asnjë renditje të garantuar të gabimeve në matje të reja. Përzgjedhja e modelit kërkon një kriter të pavarur nga përshtatja fillestare.

Çfarë na tregon dhe çfarë nuk na tregon zvogëlimi i gabimit?

Kur kalojmë nga familja e funksioneve afine te familja e polinomeve të shkallës jo më të madhe se dy, nuk humbasim asnjë model të mëparshëm: mjafton që koeficienti i termit kuadratik të jetë zero. Prandaj vlera më e vogël e shumës së katrorëve të mbetjeve nuk mund të rritet. Ky është përfundim matematikor që vlen për të njëjtat të dhëna dhe të njëjtin kriter minimizimi. Ai nuk thotë se polinomi kuadratik do të parashikojë më mirë matjet e ardhshme.

Një mënyrë për ta shqyrtuar këtë dallim është të ruajmë disa matje jashtë grupit të përdorur për përcaktimin e parametrave. Fillimisht ndërtojmë modelet me grupin e parë; pastaj llogarisim gabimet në grupin e dytë, pa ndryshuar parametrat. Nëse përdorim grupin e dytë për të zgjedhur modelin, për një vlerësim përfundimtar të pavarur mund të nevojitet një grup i tretë. Kjo ndarje nuk garanton vlefshmëri në çdo situatë, por zvogëlon rrezikun që të ngatërrojmë përshtatjen me aftësinë parashikuese.

4.14. Protokoll shkencor për vlerësimin e modelit

Përpara kalibrimit përcaktohen qëllimi, madhësia që parashikohet, njësitë, fusha e përdorimit dhe toleranca e pranueshme. Pas kalibrimit kontrollohen kufizimet fizike, mbetjet dhe ndjeshmëria ndaj parametrave. Matjet e rezervuara për vlerësim nuk përdoren për përcaktimin e parametrave; nëse përdoren për rishikim, nevojiten matje të tjera të pavarura për vlerësimin pasues. Raporti duhet të dallojë rezultatet e provuara matematikisht, rezultatet e llogaritura dhe përfundimet e mbështetura në matje. Të dhënat e simuluara të laboratorit ilustrojnë protokollin. Vlerësimi empirik i shërbimit kërkon matje në bibliotekë.

4.15. Përfundime dhe pyetje për diskutim shkencor

Modelimi matematik është një proces i përsëritshëm në të cilin formulimi i problemit, ndërtimi i modelit, zgjidhja dhe shqyrtimi i vlefshmërisë ndikojnë njëri-tjetrin. Një mospërputhje me matjet nuk tregon vetvetiu se duhet ndryshuar forma e modelit: mund të kërkojë kontrollin e matjeve, rishikimin e parametrave ose ripërcaktimin e sistemit. Po kështu, përputhja me matjet e përdorura për ndërtimin e modelit nuk garanton aftësinë parashikuese. Në përfundim të leksionit studenti duhet të jetë në gjendje të mbrojë zgjedhjen e një modeli, të tregojë kufizimet e tij dhe të propozojë një mënyrë të pavarur për të shqyrtuar vlefshmërinë.

Pyetje për diskutim: A mund të jenë dy modele njëkohësisht të vlefshme për të njëjtën dukuri? Në çfarë kushtesh një model më i thjeshtë është më i dobishëm? Çfarë matjesh shtesë do të ndihmonin në dallimin ndërmjet dy modeleve? Si mund të përshtatet një problem modelimi për nxënësit pa humbur natyrën e tij të hapur?

II. Seminari

2 orë mësimore · 100 minuta

Produkt i seminarit: një krahasim i argumentuar i dy modeleve. Zgjidhjet hapen vetëm pas përpjekjes individuale.

Organizimi i seminarit

Plan për 100 minuta: 15 minuta dallimi ushtrim/problem modelimi; 20 minuta formulimi dhe supozimet; 30 minuta krahasimi i modeleve; 25 minuta argumentimi dhe vlerësimi ndërmjet studentëve; 10 minuta sinteza individuale. Produkti: krahasimi i argumentuar i dy modeleve dhe propozimi për matje të reja.

Detyra individuale

1. Ndërto një kundërshembull ndaj pretendimit se saktësia formale garanton vlefshmëri empirike.
2. Ndërto dy modele të një dukurie shkollore me supozime të ndryshme.
3. Argumento kufizimet e ekstrapolimit.
4. Përshtat problemin për dy nivele shkollore.

Gabimet tipike dhe analiza e tyre

Gabimi	Ndërhyrja
Formula pa analizë	Cilat madhësi ndikojnë?
Njësitë mungojnë	Çfarë njësie ka parametri?
Ekstrapolim i pajustifikuar	Ku është testuar modeli?
Rezultat fizikisht i pamundur	Cilat kufizime mungojnë?

Detyrë lidhëse: biblioteka (brenda fazës së formulimit dhe supozimeve)

Krahasoni tri familjet e modeleve. A mund të përgjysmohet koha nëse shtohet një punonjës? Vetëm nëse puna ndahet në mënyrë të barabartë, pa pengesa të përbashkëta; një sistem i vetëm regjistrimi mund ta pengojë këtë. Propozoni matje të përsëritura me një dhe dy punonjës, duke ruajtur përzierjen e kërkesave. Pranohen modele alternative me supozime të argumentuara.

Ushtrime me zgjidhje të argumentuara

▼ 1. Identifikueshmëria e parametrave

Problemi. Një model afin $M(x)=ax+b$ plotëson $M(2)=7$. Përcaktoni familjen e modeleve dhe shqyrtoni matjen shtesë $M(5)=13$.

Zgjidhja dhe interpretimi. Nga matja e parë marrim $2a+b=7$, prandaj $b=7-2a$. Çdo numër real a përcakton një model të ndryshëm që plotëson matjen. Matja e dytë jep $5a+b=13$. Duke zbritur ekuacionet, marrim $3a=6$, pra $a=2$ dhe $b=3$. Modeli i vetëm afin është $M(x)=2x+3$. Uniciteti vlen brenda familjes së zgjedhur, jo ndërmjet të gjitha funksioneve. Për mësuesin, ky dallim është thelbësor: nxënësi duhet të argumentojë jo vetëm zgjidhjen e sistemit, por edhe zgjedhjen e familjes së funksioneve.

▼ 2. Kufizimi i informacionit të fundëm

Problemi. Krahasoni $f(x)=x+1$ dhe $g(x)=x+1+x(x-1)(x-2)$ në pikat 0, 1, 2 dhe 3.

Zgjidhja dhe interpretimi. Në tri pikat e para prodhimi $x(x-1)(x-2)$ është zero. Prandaj funksionet japin përkatësisht 1, 2 dhe 3. Në $x=3$, $f(3)=4$, ndërsa $g(3)=4+6=10$. Kjo tregon se përputhja me matjet nuk përcakton vetvetiu sjelljen jashtë tyre. Në përgjithësi, shtimi i një shumëfishi të prodhimit të faktorëve që anulohen në pikat e matjes ruan të gjitha vlerat e matura. Zgjedhja e modelit kërkon informacion shtesë mbi dukurinë.

▼ 3. Shpejtësia mesatare

Problemi. Një automjet përshkon dy segmente nga 60 km me shpejtësi 40 dhe 80 km/orë.

Zgjidhja dhe interpretimi. Koha e segmentit të parë është $60/40=1{,}5$ orë dhe e të dytit $60/80=0{,}75$ orë. Shpejtësia mesatare është raporti i largësisë së përgjithshme me kohën e përgjithshme: $120/2{,}25\approx 53{,}33$ km/orë. Mesatarja aritmetike 60 km/orë do të ishte e përshtatshme për dy intervale kohore të barabarta, jo për dy largësi të barabarta. Gabimi i zakonshëm buron nga mosidentifikimi i madhësisë që mbetet e pandryshuar.

▼ 4. Kufizimet fizike të modelit

Problemi. Një rezervuar me 600 L zbrazet me prurje 25 L/min deri në zbrazje.

Zgjidhja dhe interpretimi. Bilanci i vëllimit jep $V(t)=600-25t$ deri në çastin kur $V(t)=0$, pra $t=24$ minuta. Pas këtij çasti, prurja nuk mund të vazhdojë me të njëjtën vlerë në mungesë të ujit. Modeli fizik është $V(t)=\max(600-25t,0)$, për $t\geq 0$. Funksioni është i vazhdueshëm, por derivatet e njëanshme në $t=24$ janë -25 dhe 0, ndaj nuk është i derivueshëm aty. Ndryshimi i derivatit shpreh ndryshimin e regjimit fizik, jo një gabim të llogaritjes.

▼ 5. Rritja dhe kapaciteti

Problemi. Shqyrtoni $P(t)=1000\cdot 2^t$, ku t është numri i hapave kohorë të referimit, kur kapaciteti maksimal është K=16000.

Zgjidhja dhe interpretimi. Duke zgjidhur $1000\cdot 2^t=16000$ marrim $2^t=16$ dhe t=4. Për t>4 modeli tejkalon kapacitetin. Kjo nuk e bën formulën matematikisht të pasaktë; tregon se supozimi i dyfishimit të pandryshueshëm nuk mund të mbetet i vlefshëm përgjithmonë. Një model i kufizuar ose një ligj tjetër rritjeje kërkon argumentim nga mekanizmi i dukurisë. Prerja artificiale në K nuk është e njëjtë me një model që përshkruan ngadalësimin gradual të rritjes.

▼ 6. Përshtatja dhe parashikimi

Problemi. A garanton një model me pesë parametra që përputhet me pesë matje një parashikim të besueshëm?

Zgjidhja dhe interpretimi. Jo. Numri i parametrave nuk garanton as ekzistencën, as unicitetin e zgjidhjes pa kushte mbi strukturën e modelit. Edhe kur përshtatja është e saktë, ajo mund të pasqyrojë gabimet e matjes. Duhet të dallojmë të dhënat e përdorura për përcaktimin e parametrave nga të dhënat e pavarura të përdorura për vlerësim. Mësuesi mund të kërkojë që studentët të ndërtojnë dy funksione që përputhen me të njëjtat matje, por japin parashikime të ndryshme.

▼ 7. Ndjeshmëria e koeficientit këndor

Problemi. Dy matje në x=2 dhe x=2,5 kanë gabim absolut jo më të madh se 0,1. Vlerësoni gabimin e koeficientit këndor.

Zgjidhja dhe interpretimi. Nëse gabimet janë e_1 dhe e_2, ndryshimi i koeficientit është $(e_2-e_1)/(2{,}5-2)$. Nga pabarazia e trekëndëshit, vlera absolute nuk kalon $(0{,}1+0{,}1)/0{,}5=0{,}4$. Nëse largësia ndërmjet pikave rritet në 5, kufiri bëhet 0,04, me kusht që modeli afin të mbetet i vlefshëm në intervalin e ri. Kjo ilustron lidhjen ndërmjet projektimit të matjeve dhe qëndrueshmërisë së përcaktimit të parametrave.

▼ 8. Zgjedhja e kriterit të gabimit

Problemi. Dy modele kanë mbetje (0,0,6) dhe (3,3,3). Krahasoni MAE dhe RMSE.

Zgjidhja dhe interpretimi. Për modelin e parë MAE=2 dhe $\text{RMSE}=\sqrt{12}\approx 3{,}464$. Për të dytin MAE=3 dhe RMSE=3. Sipas MAE parapëlqehet modeli i parë, ndërsa sipas RMSE modeli i dytë. Katrori i gabimit i jep peshë më të madhe shmangieve të mëdha. Zgjedhja e kriterit duhet të lidhet me pasojat e gabimit në dukurinë e modeluar; nuk ka një renditje universale të modeleve sipas çdo kriteri.

▼ 9. Njësitë dhe parametrat

Problemi. Një model udhëtimi është $d=72t$, ku d matet në kilometra dhe t në orë. Shpreheni në metra dhe sekonda.

Zgjidhja dhe interpretimi. Me $D=1000d$ dhe $T=3600t$, kemi $D=1000\cdot 72\cdot T/3600=20T$. Koeficienti 72 km/orë dhe koeficienti 20 m/s përfaqësojnë të njëjtën shpejtësi fizike. Ndryshimi i vlerës numerike të parametrit nuk nënkupton ndryshim të dukurisë. Njësitë janë pjesë e kuptimit të modelit dhe jo zbukurim i formulës.

▼ 10. Vendimmarrja me dy modele

Problemi. Dy tarifa janë $A(n)=300+20n$ dhe $B(n)=100+30n$, për n numër të plotë jonegativ.

Zgjidhja dhe interpretimi. Barazimi jep $300+20n=100+30n$, pra $n=20$. Për $n<20$ tarifa B është më e lirë, për $n>20$ tarifa A është më e lirë dhe në $n=20$ janë të barabarta. Përfundimi vlen nëse nuk ka tarifa shtesë dhe nëse cilësia e shërbimit është e njëjtë. Nëse vendimi përfshin cilësinë, kohën ose rrezikun, kostoja nuk është më kriteri i vetëm. Kjo e dallon zgjidhjen e pabarazisë nga vendimmarrja e mbështetur në model.

III. Laboratori

1 orë mësimore · 50 minuta

Plani i laboratorit (50 min)

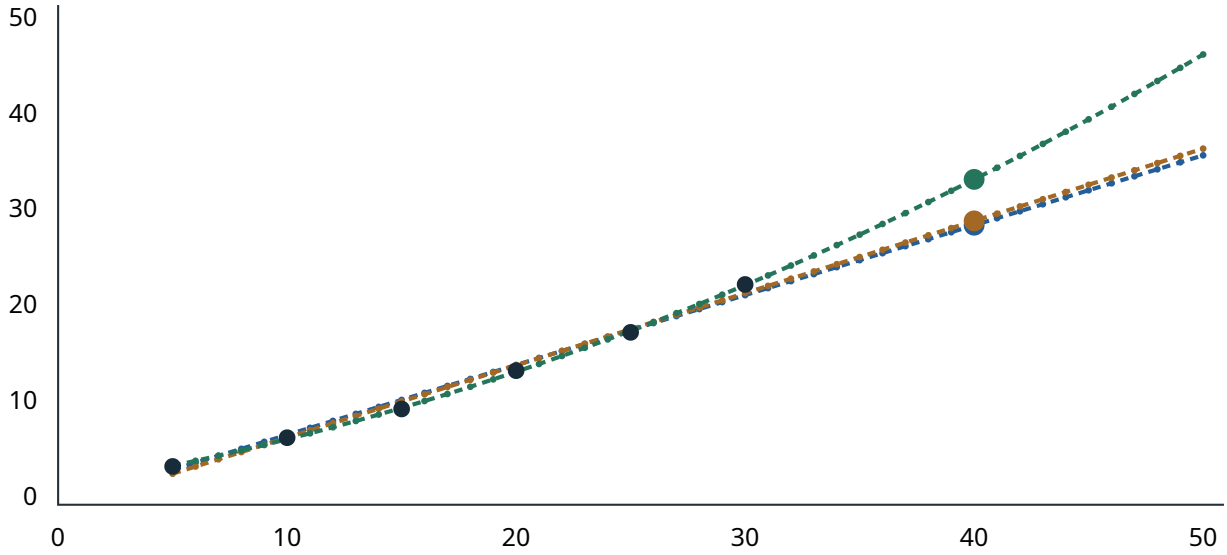
5 min: pyetja e planifikimit; 10 min: të dhënat dhe modelet; 15 min: kalibrimi dhe mbetjet; 15 min: parashikimi dhe pika e rezervuar; 5 min: përfundimi i raportit. Produkti: raport me parametrat, RMSE, gabimet, vendimin e kushtëzuar dhe planin e rishikimit.

Laboratori — Biblioteka e shkollës

Të dhëna të simuluara: numri i nxënësve 5, 10, 15, 20, 25, 30; koha në minuta 4, 7, 10, 14, 18, 23. Krahasoni tri modele të kalibruara me katrorët më të vegjël.

$M_1(n)=1660n/2275$; $M_2(n)=132n/175-8/15$; $M_3(n)=0{,}01n^2+283n/700+1{,}8$.

Grafiku: boshti horizontal — Numri i nxënësve n; boshti vertikal — Koha T (min). Pikat e vogla tregojnë numra të plotë nxënësish; vijat e ndërprera janë vazhdime grafike për lexim.



Numri i nxënësve: 40

Modeli	RMSE	Parashikimi (min)
Proporcional	0,676665	29,1868
Afin	0,634960	29,6381
Kuadratik	0,119523	33,9714

Ekstrapolim: kërkohet verifikim me të dhëna të reja.

RMSE = $\sqrt{(\Sigma e_i^2/6)}$. Gabimi më i vogël në kalibrim nuk garanton parashikim më të mirë. Modeli afin jep kohë negative për disa vlera pranë zeros; modeli kuadratik kërkon shpjegim të termit konstant dhe rritjes kuadratike.

Zgjidhja analitike e laboratorit

Minimizojmë $S=\Sigma(T_i-M(n_i))^2$. Për modelin proporcional, $a=\Sigma n_i T_i/\Sigma n_i^2=1660/2275$. Për modelin afin, ekuacionet normale janë $2275a+105b=1660$ dhe $105a+6b=76$. Zgjidhja është $a=132/175$ dhe $b=-8/15$. Për modelin kuadratik, zgjidhja është $a=0{,}01$, $b=283/700$, $c=1{,}8$.

Modeli	RMSE (min)	M(40)
Proporcional	0,676665	29,1868
Afin	0,634960	29,6381
Kuadratik	0,119523	33,9714

> Të dhënat janë të simuluara. Gabimi i kalibrimit nuk është gabim i verifikimit në të dhëna të pavarura.

Modeli kuadratik: ekuacionet normale

$$\begin{pmatrix} 1421875 & 55125 & 2275 \\ 55125 & 2275 & 105 \\ 2275 & 105 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40600 \\ 1660 \\ 76 \end{pmatrix}$$

Kolonat n^2, n dhe 1 janë të pavarura linearisht, sepse një polinom i shkallës jo më të madhe se dy që ka gjashtë rrënjë të ndryshme është identikisht zero. Prandaj minimizuesi është unik.

Argumentimi i minimumit global. Le të jetë A matrica me kolonat n^2, n dhe 1, y vektori i matjeve dhe β vektori i parametrave. Nëse β^* plotëson $A^TA\beta^*=A^Ty$, atëherë për çdo vektor h kemi $S(\beta^*+h)=S(\beta^*)+\|Ah\|^2$, sepse termi i përzier është zero nga ekuacionet normale. Pavarësia lineare e kolonave jep $Ah\neq 0$ për $h\neq 0$. Prandaj çdo ndryshim jozero i parametrave rrit shumën e katrorëve dhe β^* është minimizuesi i vetëm global. Ky argument dallon kushtin e pikës kritike nga vërtetimi i minimumit.

Modeli	M(35), min	|27−M(35)|, min	M(40), min
Proporcional	25,5385	1,4615	29,1868
Afin	25,8667	1,1333	29,6381
Kuadratik	28,2000	1,2000	33,9714

Modeli afin është negativ për $n < 70/99$ (rreth 0,7071); ndër numrat e plotë jonegativë vetëm $n=0$. Përkufizimi i shërbimit të grupit bosh kërkon marrëveshjen $T(0)=0$, të cilën modeli afin nuk e respekton. Modeli kuadratik gjithashtu nuk e respekton. Pika 35 është jashtë $[5,30]$. Nëse përdoret për zgjedhje ose rishikim, nuk mbetet provë e pavarur për modelin e zgjedhur; kërkohen të dhëna të tjera. Renditja për këtë pikë është afin, kuadratik, proporcional.

Laboratori: nga matja te përzgjedhja e modelit

Qëllimi. Të ndërtojmë një model për kohën e shërbimit në bibliotekë, të përcaktojmë parametrat nga të dhënat dhe të shqyrtojmë nëse modeli mund të përdoret për planifikimin e shërbimit. Të dhënat janë të simuluara; përfundimet nuk përbëjnë matje të një biblioteke reale.

Ndiqni planin e vetëm 50-minutësh në hyrje të laboratorit.

1. Nga dukuria te madhësitë matematikore

Numri n i nxënësve është ndryshorja e pavarur, ndërsa koha T e shërbimit, e matur në minuta, është ndryshorja e varur. Numri i nxënësve merr vlera të plota jonegative. Për lehtësi të analizës përdorim funksione të përcaktuara edhe për vlera reale, por kjo nuk do të thotë se një numër thyesor nxënësish ka kuptim fizik. Supozojmë se kushtet e shërbimit mbeten të njëjta. Nëse ndryshon numri i punonjësve, lloji i kërkesave ose mënyra e organizimit të radhës, modeli mund të mos jetë më i vlefshëm.

2. Pse përdorim katrorët më të vegjël?

Për çdo vëzhgim përcaktojmë mbetjen $e_i = T_i - M(n_i)$. Mbetja pozitive tregon se modeli nënvlerëson kohën, ndërsa mbetja negative tregon mbivlerësim. Mbledhja e thjeshtë e mbetjeve nuk është kriter i mjaftueshëm, sepse shmangiet me shenja të kundërta mund të asgjësojnë njëra-tjetrën. Katrorët e mbetjeve janë jonegativë dhe u japin peshë më të madhe shmangieve të mëdha. Ky është një kriter i zgjedhur matematikor, jo një ligj i dukurisë.

> $$S(\theta) = \Sigma_i \, (T_i - M(n_i;\theta))^2$$

Minimizimi i kësaj shume përcakton parametrat brenda familjes së zgjedhur. Ai nuk provon se vetë familja përshkruan drejt mekanizmin e shërbimit.

3. Nxjerrja e ekuacioneve normale

Për modelin proporcional $M(n)=an$, funksioni $S(a)$ është polinom kuadratik me koeficient kryesor $\Sigma n_i^2 = 2275 > 0$. Nga kushti $S'(a) = -2\Sigma n_i(T_i - a n_i) = 0$ marrim $a = 1660/2275$. Meqë $S''(a) = 4550 > 0$, pika kritike është minimumi i vetëm global.

Për modelin afin $M(n)=an+b$, barazimi me zero i dy derivateve të pjesshme jep sistemin $2275a+105b=1660$, $105a+6b=76$. Përcaktori është $2275\cdot 6-105^2=2625>0$. Kështu sistemi ka zgjidhje të vetme. Matrica e sistemit është pozitivisht e përcaktuar, prandaj zgjidhja minimizon shumën e katrorëve në të gjithë planin e parametrave.

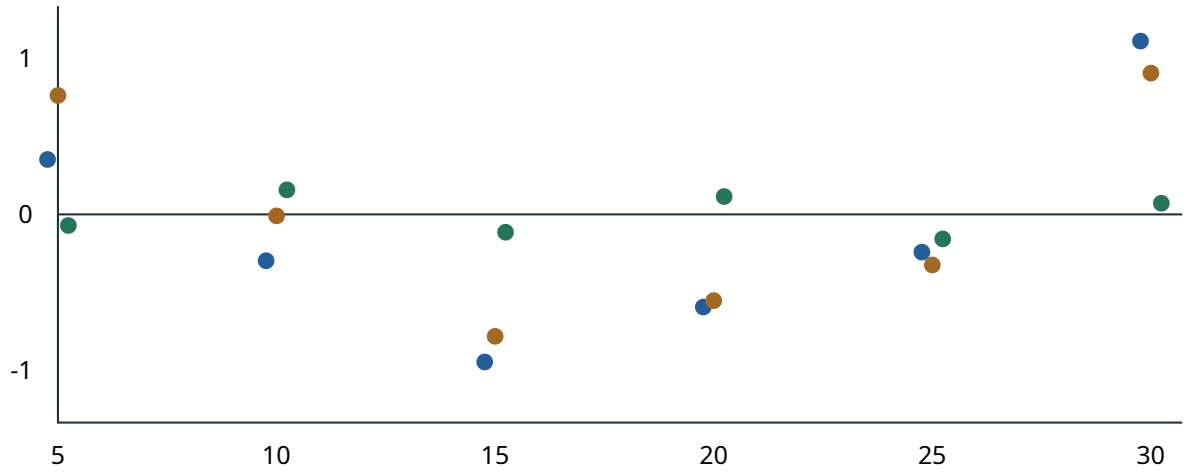
Për modelin kuadratik zbatohet i njëjti arsyetim me tri parametra. Për këtë model, shtesa $M(n+1)-M(n)$ rritet me 0,02 minuta kur n shtohet me një. Shpjegimi i kësaj sjelljeje kërkon të dhëna për mënyrën e organizimit dhe ngarkesën e shërbimit.

4. Analiza e mbetjeve

Vlerat e mëposhtme janë në minuta dhe janë rrumbullakosur në katër shifra pas presjes. Vëreni se mbetjet e modelit proporcional janë negative në pjesën e mesme të intervalit, ndërsa në skaje janë pozitive. Kjo sugjeron një lakim të papërshkruar nga modeli, por gjashtë vëzhgime nuk mjaftojnë për një përfundim statistikor të fortë.

n	T	Proporcional	Afin	Kuadratik
5	4	0,3516	0,7619	-0,0714
10	7	-0,2967	-0,0095	0,1571
15	10	-0,9451	-0,7810	-0,1143
20	14	-0,5934	-0,5524	0,1143
25	18	-0,2418	-0,3238	-0,1571
30	23	1,1099	0,9048	0,0714

Grafiku: boshti horizontal — Numri i nxënësve n; boshti vertikal — Mbetja (min).



Vija horizontale në zero përfaqëson përputhjen e plotë me matjen. Mbetjet nuk duhen ngatërruar me gabimin e matjes: ato përfshijnë edhe mospërputhjen e strukturës së modelit me dukurinë.

5. Eksperiment me të dhëna të reja

Ndryshoni kohën e supozuar të shërbimit për 35 nxënës. Kjo pikë nuk përdoret në përcaktimin e parametrave. Vëreni si ndryshon renditja e modeleve sipas gabimit absolut.

Koha e re (minuta): 27,0

Modeli	Parashikimi	Gabimi absolut
Proporcional	25,5385	1,4615
Afin	25,8667	1,1333
Kuadratik	28,2000	1,2000

Gabimi më i vogël në këtë pikë: Afin.

Një vëzhgim i vetëm nuk mjafton për të vërtetuar aftësinë parashikuese. Në një studim real duhen mbledhur matje të pavarura në kushte të krahasueshme. Për më tepër, modeli afin parashikon kohë negative pranë zeros; kjo kufizon përdorimin e tij fizik. Modeli kuadratik rritet pa kufi dhe nuk duhet përdorur automatikisht për grupe shumë më të mëdha.

6. Përfundimi i raportit

Studenti duhet të dallojë modelin me përshtatjen më të mirë ndaj të dhënave të përdorura nga modeli më i përshtatshëm për vendimmarrje. Raporti duhet të përmbajë formulimin e problemit, supozimet, njësitë e matjes, parametrat, grafikun e mbetjeve, një parashikim dhe kufizimet e tij. Për mësuesin, vlera e kësaj veprimtarie qëndron te arsyetimi i zgjedhjes së modelit, jo vetëm te gjetja e një formule.

Eksperiment shtesë: verifikimi jashtë grupit të të dhënave

Supozoni se një matje e re për 35 nxënës jep 27 minuta. Kjo është matje e simuluar, jo dëshmi reale. Llogaritni gabimin absolut për secilin model.

▼ **Zgjidhja**

Modeli proporcional: $|27-25{,}5385|=1{,}4615$; modeli afin: $|27-25{,}8667|=1{,}1333$; modeli kuadratik: $|27-28{,}2|=1{,}2$ minuta. Në këtë skenar modeli afin ka gabimin më të vogël në pikën e re, megjithëse modeli kuadratik ka RMSE më të vogël në kalibrim. Një pikë e vetme nuk mjafton për përzgjedhje përfundimtare.

Raporti i studentit

Supozimet, modeli i përzgjedhur, dëshmitë dhe kufizimet

Vendimi real: mblidhni kohë të përsëritura për grupe 30–40 nxënësish, me të njëjtin numër punonjësish, radhë dhe përzierje kërkesash. Regjistroni ndërprerjet dhe vlerësoni përqindjen e grupeve që përfundojnë brenda 30 minutave; caktoni paraprakisht tolerancën e rrezikut. Pika e simuluar nuk e vlerëson këtë përqindje.

IV. Biblioteka e mësuesit

Material profesional VI–XII

Përshtatjet VI–XII janë propozime didaktike; lidhjet me rezultatet zyrtare të programeve mbeten për verifikim.

Fletë pune e printueshme

Emri: _____ Klasa: _____ Data: _____

Të dhënat e simuluara: (5,4), (10,7), (15,10), (20,14), (25,18), (30,23). Koordinata e parë: nxënës; e dyta: minuta.

1. Identifiko madhësitë dhe njësitë.
2. Paraqit të dhënat grafikisht.
3. Ndërto një model dhe argumento supozimet.
4. Parashiko kohën për 35 nxënës.
5. Propozo një matje të re për verifikim.

Arsyetimi

Biblioteka e mësuesit

Fletë pune: paraqit të dhënat e bibliotekës, identifiko madhësitë, ndërto një model, parashiko për 35 nxënës, argumentoni supozimet dhe propozoni verifikim me matje të reja.

Pyetje orientuese: Çfarë mungon? Çfarë njësie ka parametri? A është rezultati fizikisht i mundshëm? Për cilat vlera është testuar modeli?

Përshtatje të propozuara: VI matje dhe numra; VII raporte; VIII tabela; IX grafikë; X funksione; XI krahasim funksional; XII sjellje e funksioneve. Lidhjet specifike me programet zyrtare mbeten për verifikim.

Rubrika analitike (100 pikë)

Kriteri	Pesha
Kuptimi, formulimi, supozimet	30
Matematizimi dhe zgjidhja	30
Interpretimi, verifikimi, kufizimet, komunikimi	40

Çdo kriter vlerësohet në shkallën 0–4; pikët janë pesha × niveli/4. Instrument i propozuar, ende i papilotuar.

Veprimtari të diferencuara VI–XII

Propozime didaktike, jo citime të rezultateve zyrtare të të nxënit. Të dhënat janë të simuluara. Mësuesi përshtat kërkesat sipas programit në fuqi.

Klasa	Detyra dhe produkti	Zgjidhje orientuese
VI	Lexo tabelën; krahaso 5 dhe 20 nxënës.	14−4=10 minuta shtesë.
VII	Krahaso kohën për nxënës për 10 dhe 30 nxënës.	0,7 dhe 23/30 minuta; raporti nuk është konstant.
VIII	Ndërto tabelën e shtesave për çdo 5 nxënës.	3, 3, 4, 4, 5 minuta.
IX	Ndërto drejtëzën përmes pikave (5,4) dhe (30,23).	T=0,76n+0,2; në 35 nxënës: 26,8 minuta.
X	Krahaso modelin afin me atë proporcional.	Kontrollo mbetjet dhe kushtin T(0)=0.
XI	Krahaso modelet afin dhe kuadratik në 35 nxënës.	25,8667 dhe 28,2 minuta; kërko matje të reja.
XII	Analizo rritjen e modelit kuadratik dhe kufijtë e përdorimit.	T′(n)=0,02n+283/700; interpretimi i derivatit është përafrues për numër diskret nxënësish.

Diagnoza e arsyetimit

Nëse nxënësi zgjedh modelin vetëm nga pamja e grafikut, kërko kontroll numerik. Nëse pranon kohë negative, kërko bashkësinë e vlerave fizikisht të lejueshme. Nëse zgjedh modelin kuadratik vetëm nga RMSE, kërko të dhëna të pavarura.

Udhëzues i zgjeruar për mësuesin: shtatë situata modelimi

Këto situata janë propozime origjinale didaktike me të dhëna të ndërtuara për mësim. Ndarja sipas klasave është orientuese; përputhja me rezultatet zyrtare të të nxënit nuk është certifikuar. Mësuesi duhet të vlerësojë njohuritë e nxënësve përpara zbatimit.

Organizimi i sugjeruar për një orë 50-minutëshe: 5 minuta paraqitje e situatës, 10 minuta punë individuale, 15 minuta diskutim në grupe, 15 minuta krahasim i modeleve dhe 5 minuta reflektim. Mos jepni formulën në fillim: kërkoni që nxënësit të përcaktojnë madhësitë, njësitë dhe supozimet. Vlerësoni edhe arsyetimin e një nxënësi që propozon model tjetër të mbrojtshëm.

Klasa VI — Uji për kopshtin e shkollës

Situata për nxënësin. Një enë mban 12 litra. Për ujitjen e çdo vazoje përdoren 2 litra. Sa vazo mund të ujiten? Çfarë ndryshon nëse 1 litër derdhet gjatë transportit?

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Pa humbje ujiten 6 vazo. Me humbje mbeten 11 litra, prandaj ujiten plotësisht 5 vazo dhe mbetet 1 litër. Numri i vazove është numër natyror; rezultati 5,5 nuk përfaqëson numrin e vazove të ujitura plotësisht.

Diagnostikimi i gabimit. Nxënësi rrumbullakos 5,5 në 6. Kërkojini të kontrollojë nëse 12 litrat e nevojshëm janë në dispozicion.

Detyrë zgjeruese. Ndryshoni sasinë e ujit në 15 litra dhe kërkoni një rregull për numrin e vazove.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi jep 5 vazo dhe 1 L mbetje, duke kontrolluar $2 \cdot 5 \le 11$.

Klasa VII — Përzierja e ngjyrave

Situata për nxënësin. Për 3 litra bojë përdoren 2 litra bojë e bardhë dhe 1 litër bojë blu. Përgatitni 7,5 litra me të njëjtën përbërje. A mjaftojnë 4 litra bojë e bardhë?

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Faktori i zmadhimit është 7,5/3=2,5. Duhen 5 litra bojë e bardhë dhe 2,5 litra blu. Me 4 litra të bardhë mund të përgatiten vetëm 6 litra përzierje, nëse ka mjaftueshëm bojë blu. Supozohet se vëllimet mblidhen.

Diagnostikimi i gabimit. Nxënësi shton të njëjtën sasi te të dy përbërësit. Kërkojini të krahasojë raportet para dhe pas shtimit.

Detyrë zgjeruese. Shqyrtoni rastin kur disponohen vetëm 1,5 litra bojë blu.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi ruan raportin 2:1 dhe kontrollon shumën e vëllimeve.

Klasa VIII — Mbledhja e letrës për riciklim

Situata për nxënësin. Në katër javë janë mbledhur përkatësisht 8, 11, 15 dhe 20 kg letër. Ndërtoni dy parashikime për javën e pestë dhe argumentoni zgjedhjen.

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Shtesat janë 3, 4, 5 kg. Nëse vazhdon ky rregull, shtesa tjetër është 6 kg dhe parashikimi 26 kg. Nëse përdoret shtesa mesatare 4 kg, parashikimi është 24 kg. Të dyja janë hipoteza, jo matje.

Diagnostikimi i gabimit. Nxënësi e paraqet 26 kg si rezultat të sigurt. Pyeteni nëse pushimet shkollore mund ta ndryshojnë sasinë.

Detyrë zgjeruese. Propozoni një matje të re dhe një mënyrë për të krahasuar gabimet.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi paraqet tabelën e shtesave dhe argumenton nëse pririja mund të vazhdojë.

Klasa IX — Kostoja e një udhëtimi

Situata për nxënësin. Dy oferta kanë kosto A(x)=200+40x dhe B(x)=80+60x lekë, ku x është largësia në kilometra. Kur është secila më e leverdishme?

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Barazimi jep 20x=120, pra x=6 km. Për 0≤x<6 oferta B kushton më pak; për x>6 oferta A kushton më pak. Në 6 km të dyja kushtojnë 440 lekë. Supozohet se nuk ka tarifa shtesë.

Diagnostikimi i gabimit. Nxënësi krahason vetëm koeficientët këndorë. Kërkojini të llogarisë koston në 1 km dhe në 10 km.

Detyrë zgjeruese. Shtoni një tarifë pritjeje dhe diskutoni pse largësia nuk mjafton më si ndryshore.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi përcakton pragun e barazimit të kostove dhe argumenton zgjedhjen në të dy anët e pragut.

Klasa X — Ftohja e një pijeje

Situata për nxënësin. Temperatura fillestare është 80°C dhe temperatura e dhomës 20°C. Pas 10 minutash matet 50°C. Krahasoni modelet $T_1(t)=80-3t$ dhe $T_2(t)=20+60\cdot 2^{(-t/10)}$, ku t është vlera numerike e kohës në minuta.

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Të dy modelet japin 80°C në fillim dhe 50°C pas 10 minutash. Pas 20 minutash japin përkatësisht 20°C dhe 35°C. Modeli i parë parashikon temperatura nën atë të dhomës pas 20 minutash; i dyti i afrohet 20°C nga sipër. Kjo nuk vërteton se modeli i dytë përputhet me çdo matje.

Diagnostikimi i gabimit. Nxënësi mendon se dy pika përcaktojnë çdo funksion. Kërkojini të llogarisë vlerat në 20 minuta.

Detyrë zgjeruese. Propozoni matje në 5, 15 dhe 30 minuta.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi krahason parashikimet në minutën 20 dhe propozon matje të tjera.

Klasa XI — Krahasimi i parashikimeve

Situata për nxënësin. Për tri matje të pavarura dy modele japin mbetje (0,0,6) dhe (3,3,3). Cilin do të zgjidhnit nëse një gabim mbi 4 njësi është i papranueshëm?

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Modeli i parë ka gabim mesatar absolut 2 dhe gabim maksimal 6; i dyti ka përkatësisht 3 dhe 3. Sipas kufizimit të dhënë, vetëm modeli i dytë pranohet. Kriteri i zgjedhjes duhet të përcaktohet nga qëllimi, jo nga një tregues i vetëm.

Diagnostikimi i gabimit. Nxënësi zgjedh modelin me mesataren më të vogël pa kontrolluar kufizimin. Kërkojini të shënojë secilin gabim në boshtin numerik.

Detyrë zgjeruese. Diskutoni çfarë mund të përfundohet nga vetëm tri matje.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi llogarit gabimin maksimal 6 dhe 3 dhe zbaton pragun 4.

Klasa XII — Sipërfaqja e një këndi të gjelbër

Situata për nxënësin. Me 40 m gardh ndërtohet një drejtkëndësh pranë një muri të drejtë; ana përgjatë murit nuk rrethohet. Përcaktoni përmasat që japin sipërfaqen më të madhe.

▼ **Zgjidhja e argumentuar dhe udhëzimi për mësuesin**

Nëse x është gjerësia dhe përdoren të gjithë 40 m gardh, gjatësia është $40-2x$, me $0 < x < 20$. Sipërfaqja $S(x)=40x-2x^2=200-2(x-10)^2 \le 200$ m². Barazia arrihet vetëm për $x=10$ m, me gjatësi 20 m. Supozojmë mur mjaftueshëm të gjatë dhe terren të rrafshët.

Diagnostikimi i gabimit. Nëse nxënësi përdor $2x+2y=40$, kërkojini të vizatojë tri anët që rrethohen dhe të shpjegojë pse ana përgjatë murit nuk përfshihet.

Detyrë zgjeruese. Nëse muri është 16 m dhe përdoren të gjithë 40 m gardh, $40-2x \le 16$, pra $12 \le x < 20$. Në këtë interval $S'(x)=40-4x < 0$, ndaj maksimumi është $S(12)=192$ m², me gjerësi 12 m dhe gjatësi 16 m. Kufizimi fizik përjashton optimumin e pakufizuar $x=10$.

Dëshmi e të nxënit. Nxënësi nxjerr kufizimin e murit dhe argumenton maksimumin 192 m².

Vlerësimi formues

Në fund të orës, kërkoni tri fjali: çfarë përfaqëson modeli, çfarë nuk përfshin dhe si mund të kontrollohet. Përgjigjja numerike e saktë nuk mjafton nëse nxënësi nuk dallon një përfundim matematikor nga një parashikim empirik. Përdorni rubrikën ekzistuese të kapitullit për vlerësim më të hollësishëm.

Rubrika analitike e zgjeruar

0: pa dëshmi; 1: fragmentare; 2: pjesërisht e argumentuar; 3: e saktë me mangësi të vogla; 4: e plotë dhe e argumentuar. Instrument i papilotuar.

Kriteri	0	1	2	3	4
Kuptimi, formulimi, supozimet	Nuk formulon pyetje	Emërton dukurinë pa pyetje	Pyetje e matshme, supozime të paplota	Pyetje dhe supozime të qarta, një mangësi	Pyetje, njësi, kushte dhe supozime të argumentuara
Matematizimi dhe zgjidhja	Pa model	Formulë pa lidhje me situatën	Model i pjesshëm ose gabim llogaritjeje	Model dhe zgjidhje të sakta me mangësi të vogël	Model i argumentuar, llogaritje të riprodhueshme dhe kufizime të respektuara
Interpretimi, verifikimi, kufizimet, komunikimi	Pa interpretim	Vetëm rezultat numerik	Interpretim pa kontroll të mjaftueshëm	Interpretim dhe kontroll, një kufizim i munguar	Interpretim, dëshmi, kufizime, plan rishikimi dhe komunikim i qartë

Dy studentë mund të marrin 100 pikë: njëri zgjedh modelin afin për interval të ngushtë, tjetri kuadratik për lakimin e mbetjeve, nëse të dy argumentojnë kriterin, llogaritjet, kufizimet dhe planin e matjeve. Instrument i propozuar, i papilotuar.

Kuptimi, formulimi, supozimet (30 pikë)	0
Matematizimi dhe zgjidhja (30 pikë)	0
Interpretimi, verifikimi, kufizimet, komunikimi (40 pikë)	0

0,00 / 100

V. Studimi i pavarur

Teori plotësuese dhe vetëvlerësim

Lexim i zgjeruar: identifikueshmëria, vlefshmëria empirike dhe kufizimet e ekstrapolimit. Detyrë: ndërto dy modele për një dukuri shkollore dhe argumentoji.

Studimi i pavarur: nga njohja te gjykimi shkencor

Studimi i pavarur nuk ka për qëllim përsëritjen mekanike të leksionit. Ai kërkon që studenti të ndërtojë një argument të vetin për marrëdhënien ndërmjet dukurisë, supozimeve dhe përfundimit matematikor. Për çdo detyrë, dalloni çfarë rrjedh logjikisht nga modeli dhe çfarë kërkon mbështetje nga vëzhgimet. Koha e sugjeruar për këtë kapitull është pesë orë pune individuale (jo pesë orë mësimore 50-minutëshe); kjo është një ndarje orientuese brenda 80 orëve të semestrit.

1. Një familje modelesh dhe kufijtë e informacionit

Dy matje japin $M(0)=4$ dhe $M(2)=10$. Ndërtoni një model afin dhe një familje modelesh kuadratike që plotësojnë të njëjtat kushte. Shqyrtoni nëse parashikimi në $x=4$ përcaktohet nga matjet.

▼ **Zgjidhja e argumentuar**

Modeli afin është $M_0(x)=4+3x$. Për çdo numër real c, funksioni $M_c(x)=4+3x+cx(x-2)$ merr të njëjtat vlera në 0 dhe 2, sepse prodhimi $x(x-2)$ bëhet zero në këto pika. Në $x=4$ kemi $M_c(4)=16+8c$. Me ndryshimin e c, kjo vlerë mund të marrë çdo vlerë reale. Pra, të dhënat nuk përcaktojnë parashikimin pa një kufizim shtesë mbi familjen e modeleve. Nëse dukuria kërkon vlera jonegative, duhet të shqyrtohet edhe bashkësia e gjendjeve fizikisht të mundshme; ky kufizim nuk rrjedh nga dy matjet.

---

2. Gabimi i matjes dhe zgjedhja e pikave

Dy matje të ordinatave kanë gabim absolut jo më të madh se 0,2 njësi. Krahasoni kufirin e gabimit të koeficientit këndor kur largësia e abshisave është 0,5 dhe kur është 5. Supozoni se abshisat njihen saktësisht.

▼ **Zgjidhja e argumentuar**

Nga formula e koeficientit këndor, ndryshimi i tij është diferenca e dy gabimeve të ordinatave, e pjesëtuar me largësinë e abshisave. Pabarazia trekëndore jep kufirin 0,4/d. Për d=0,5 kufiri është 0,8; për d=5 është 0,08. Zgjerimi dhjetëfish i largësisë e zvogëlon dhjetëfish këtë kufi. Megjithatë, zgjedhja e pikave më të largëta është e arsyeshme vetëm kur modeli afin mbetet i përshtatshëm në intervalin e zgjeruar. Përndryshe, gabimi i strukturës së modelit mund të mbizotërojë mbi gabimin e matjes.

---

3. Parashikimi dhe kufizimi fizik

Një depo përmban 120 litra ujë dhe zbrazet me prurje konstante 8 litra në minutë derisa të boshatiset. Ndërtoni modelin për çdo kohë jonegative dhe analizoni vazhdimësinë e derivueshmërinë.

▼ **Zgjidhja e argumentuar**

Koha e zbrazjes është 120/8=15 minuta. Modeli fizik është V(t)=max(120−8t,0), për t≥0. Në t=15 të dyja pjesët japin zero, ndaj funksioni është i vazhdueshëm. Derivati nga e majta është −8 dhe nga e djathta zero; për këtë arsye funksioni nuk është i derivueshëm në atë pikë. Ndryshimi i menjëhershëm i derivatit është pasojë e idealizimit të prurjes konstante deri në zbrazje, jo një përfundim universal për çdo depo reale.

---

4. Detyrë kërkimore individuale

Zgjidhni një dukuri të vëzhgueshme në shkollë, për shembull kohën e pritjes në një shërbim. Përcaktoni qëllimin, njësitë e matjes dhe kushtet e vëzhgimit. Ndërtoni dy modele alternative, përcaktoni parametrat me një grup matjesh dhe, nëse është e mundur, ruani matje të tjera për kontrollin e parashikimeve. Në raport paraqitni tabelën e të dhënave, formulat, grafikun e mbetjeve, kufizimet dhe një propozim për përmirësim. Mos paraqitni të dhëna të simuluara si matje reale. Nëse nuk mund të mblidhni të dhëna, deklaroni qartë natyrën e simuluar të eksperimentit.

Vetëkontrolli i raportit: A janë të përcaktuara njësitë? A janë të dallueshme supozimet nga matjet? A mund të riprodhohen llogaritjet? A respektohen kufizimet fizike? A mbështetet zgjedhja e modelit në qëllimin e deklaruar? A është shpjeguar se çfarë nuk mund të përfundohet nga të dhënat?

Vetëvlerësimi

1. Çfarë nuk garanton saktësia matematikore?

Vlefshmërinë empirike
Konsistencën logjike

2. Cili funksion është linear në kuptimin algjebrik?

2x+3
3x

3. Kur justifikohet kompleksiteti?

Gjithmonë
Kur përmirësimi mbështetet në qëllimin dhe të dhënat

4. Për k=0,05, ekuilibri i rezervuarit është:

800 L
1000 L

5. Cila veprimtari zhvillon kompetencën modeluese?

Memorizimi i formulës
Ndërtimi dhe verifikimi i modeleve

6. Dy modele përputhen në dy pika. Çfarë mund të përfundojmë?

Janë identike kudo
Përputhen në ato pika; jashtë tyre duhen kushte shtesë

7. Për të njëjtat të dhëna, cili pohim është gjithmonë i vërtetë?

MAE ≤ RMSE
MAE > RMSE

8. Nëse largësia e abshisave dyfishohet, kufiri 2ε/d:

Përgjysmohet
Dyfishohet

9. Cilat matje shërbejnë më mirë për kontrollin e parashikimit?

Matjet e papërdorura në përcaktimin e parametrave
Vetëm matjet e përdorura në përcaktimin e parametrave

10. Modeli i zbrazjes parashikon vëllim negativ. Çfarë duhet bërë?

Pranuar vlerën negative
Rishikuar bashkësinë e vlefshmërisë ose modelin

Fjalori shkencor

Shqip	Anglisht	Kuptimi
Matematizimi	Mathematization	Kalimi nga situata reale te marrëdhëniet matematikore.
Idealizimi	Idealization	Thjeshtimi i qëllimshëm i dukurisë për ndërtimin e modelit.
Kalibrimi	Calibration	Përcaktimi i parametrave duke përdorur të dhëna.
Mbetja	Residual	Diferenca ndërmjet vlerës së vëzhguar dhe asaj të parashikuar.
Identifikueshmëria	Identifiability	Uniciteti i parametrave brenda familjes dhe planit të vëzhgimit të përcaktuar.
Ekstrapolimi	Extrapolation	Parashikimi jashtë intervalit të të dhënave.
Kompetenca modeluese	Modelling competency	Aftësia për të ndërtuar, analizuar dhe vlerësuar modele.
Vlefshmëria empirike	Empirical validity	Shkalla e mbështetjes së modelit nga vëzhgimet për një qëllim të caktuar.
Abstraksioni	Abstraction	Përzgjedhja e tipareve që kanë rëndësi për qëllimin e modelimit.
Supozimi	Assumption	Kusht i pranuar gjatë ndërtimit të modelit, që kërkon arsyetim.
Bashkësia e përcaktimit	Domain	Bashkësia e vlerave për të cilat përcaktohet funksioni.
Ndjeshmëria	Sensitivity	Ndryshimi i rezultatit kur ndryshojnë të dhënat ose parametrat.
Interpolimi	Interpolation	Vlerësimi brenda intervalit të të dhënave të njohura.
Mbipërshtatja	Overfitting	Përshtatje që përfshin edhe luhatje të rastit dhe mund të dobësojë parashikimin.
Gabimi mesatar absolut	Mean absolute error	Mesatarja aritmetike e vlerave absolute të mbetjeve.
Rrënja e gabimit mesatar kuadratik	Root mean squared error	Rrënja katrore e mesatares së katrorëve të mbetjeve.

Literatura dhe statusi i verifikimit

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling.* Routledge. DOI.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study.* Springer. DOI.

Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S. (Eds.). (2015). *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences.* Springer. DOI.

Të dhënat bibliografike të tri botimeve u kontrolluan më 28 nëntor 2026. Shembujt dhe instrumentet didaktike janë propozime të autores.

Gjurmueshmëria kurrikulare

Programi i përditësuar Matematikë 6 zbatohet nga viti shkollor 2026–2027, sipas pikës 22 të urdhrit të miratimit. Veprimtaria e ujitjes ushtron arsyetimin për një situatë problemore numerike dhe vlerësimin e zgjidhjes në kontekst, në lidhje me kompetencën «Zgjidhja problemore» të programit. Veprimtaritë për klasat VII–XII janë propozime didaktike për t’u përshtatur me programin e klasës.

Versioni 2.1 · 28 nëntor 2026